بسم الله الرحمن الرحيم

المملكة العربية السعودية
وزارة التعليم العالي
جامعة أم القرى
كلية العلوم التطبيقية فرع الطالبات
الدراسات العليا

اعتماد لجنة المناقشة

نوقشت رسالة الطالبة/ رانيا بنت مصطفى محمد علي حريري بتاريخ ١٠ /١٤٣٠/٦ هـ وتكونت لجنة المناقشة من الأساتذة :-

الاسم	التوقيع	المرتبة العلمية/التخصص	الجهة	صفة العضوية
١- د/ مجدي السيد محمد العدل		أستاذ الإحصاء الرياضي المساعد	-كلية العلوم بجامعة الطائف	(مقرراً للجنة)
٢- د/ بخيت نفيع المطرفي		أستاذ الإحصاء الرياضي المشارك	- عميد كلية الهندسة جامعة الطائف	(عضواً)
٣-أ. د/ محمد عبد الوهاب محمود		أستاذ الإحصاء الرياضي	-كلية العلوم بجامعة الملك عبد العزيز	(عضواً)

قرار اللجنة :أوصت اللجنة بقبول الرسالة بدرجة ٩٠٪ وتقدير ممتاز

والتوصية بمنح الطالبة درجة الماجستير في الإحصاء الرياضي ..

تاريخ تسليم الرسالة : ٥/٧/١٤٣٠هـ

اسم المستلمة :هند بنت ياسين بدري

وكيلة الكلية للدراسات العليا

١٥-٦-١٤٣٠هـ

د/ أحلام بنت حسن قملو

ختم الكلية

عميدة الكلية

١٥/٦/١٤٣٠

د/ سميحة بنت عبد الله القاري

المملكة العربية السعودية
وزارة التعليم العالي
جامعة أم القرى
كلية العلوم التطبيقية – فرع الطالبات
عمادة الدراسات العليا
قسم الرياضيات

دراسة بعض خواص الإحصاءات المرتبة المعممة

On Some Properties of Generalized Order Statistics

رسالة مقدمة إلى قسم الرياضيات
ضمن متطلبات الحصول على درجة الماجستير في العلوم
تخصص(إحصاء رياضي)

إعداد الطالبة

رانيا بنت مصطفى بن محمد علي حريري

إشراف

د/ مجدي السيد محمد العدل

أستاذ الإحصاء المساعد بقسم الرياضات و الإحصاء
كلية العلوم - جامعة الطائف

1430هـ / 2009م

الشكر و التقدير

((رب أوزعني أن أشكر نعمتك التي أنعمت عليّ وعلى والديّ وأن أعمل صالحاً ترضاه وأدخلني برحمتك في عبادك الصالحين)) .

الحمد لله الذي من علينا فأفضل و الذي أعطانا فأجزل و جعلنا من خير أمة أخرجت للناس، فالشكر لك اللهم يامن هديتنا للرشاد و مننت علينا بإتباع طريق خير العباد سيدنا محمد ﷺ المؤيد بالحجج و البينات، الذي قال و ماينطق عن الهوى عليه الصلاة و السلام:

(إن أشكر الناس لله _ عز وجل_ أشكرهم للناس) .

و إن كان لي من شكر بعد شكري لله تعالى الذي أعانني حتى أتممت رسالتي، فلأستاذي الفاضل و مشرفي على الرسالة الدكتور مجدي السيد محمد العدل على ما أسداه لي من عون و ما بذله من جهد و متابعة و حرصه على إتمام هذه الرسالة، فجزاه الرزاق الكريم عني خير الجزاء في الدنيا و الاخرة.

و في حياة كل إنسان أشخاص تركوا بصمات في مسيرة حياته، لذا يسرني أن أسطر بعض كلمات الشكر و التقدير العرفان بالجميل للذين ساهموا بجهودهم الملموسة و بدعوات قلوبهم الصادقة لإنجاز هذا العمل.

أولى كلمات أهديها إلى والدي الحبيب رحمه الله الذي غرس فينا حب العلم و السعي في طلبه، سائلةً المولى عز وجل أن يتغمد روحه بالرحمة ، و أن يجمعني به في الفردوس الأعلى و أن يجعلني العلي القدير من عمله الصالح .

و إليك يا أمي الحبيبة أهدي كل نجاحي في هذه الحياة، يا من نثرت أيام عمرك في سبيل تربيتي و يا من تري في نجاحي نجاحك.و أنا أعلم أنه لو بلغت كلمات شكري ملء الأرض فلن تفي بحقك غير إني أسأل الله تبارك في علاه أن يشفيك و يمدك بالصحة و العافية و أن يطيل بقائك ويبلغني رضائك.

إليك يا شقيقتي الغالية رامية كل الشكر و المحبة، و لطالما شاركتيني أفراحي و أتراحي و أحلامي وذكرياتي فلك مني خالص الدعاء بدوام التوفيق و النجاح و أن يحفظك الحافظ من كل مكره. و إلى أخواني و أخواتي أدام الله علينا نعمة الأخوة ما حيينا.

و إليكن أهدي يا من صنعنا معا لحياتنا رفقة طلبنا بها رضا الله فأنعم الله علينا بصحبتنا الصالحة التي أرجوا من الله أن يجعلنا ممن قال فيهم إخواناً على سرر متقابلين

كما أتقدم بالشكر الجزيل لأحد صروح العلم _كلية العلوم التطبيقية _ فرع الطالبات ، ممثلةً في عميدة الكلية الدكتورة سميحة قاري و وكيلة الكلية الدكتورة بسمة شافعي و وكيلة الكلية للدراسات العليا الدكتورة أحلام قملو، و رئيسة قسم الرياضيات الدكتورة مكية مكي.

و كما أتقدم بالشكر للدكتورة بثينة بدر وكيلة الدراسات العليا سابقاً على ما بذلته من جهود في بداية مشواري.

كما أبعث بجزيل شكري وفائق امتناني لمن وهبتني من وقتها و علمها لأختي التي أفخر بصداقتها الأستاذة تغريد عامر التي لم تألو جهداً في مساعدتي و تقديم العون، فكلما احتجت لأشي تلفت فوجدها السابّقة دائماً، فأسأل الله الذي لا يرد يدي عبده أبداً أن يجيب لك كل ما تسأليه و زيادة.

كذلك أتوجه بخالص شكري لرئيس قسم العلوم الرياضية بجامعة أم القرى و وكيلة رئيس القسم و سكرتيرة القسم و زميلاتي من عضوات هيئة التدريس.

و لا يفوتني أن أتقدم بالشكر الجزيل لأعضاء لجنة المناقشة الدكتور محمد عبد الوهاب محمود و الدكتور بخيت بن نفيع المطرفي لتفضلهم بقبول تحكيم رسالتي و إثرائها بكل ما هو نافع و مفيد.

وأخيراً أسأل الله العظيم رب العرش العظيم أن يجزي كل من أسهم في هذا العمل بقليل أو كثير أن يجعله في ميزان الحسنات يوم القيامة وأن يرفع به الدرجات.

الباحثة

مُلخص الرسالة

دراسة بعض خواص الإحصاءات المرتبة المعممة

الهدف الرئيسي لهذه الدراسة هو عمل حصر مركز لأهم النتائج في موضوع الإحصاءات المرتبة المعممة، وبصورة خاصة نظرية التوزيع، والعزوم للإحصاءات المرتبة المعممة، والعلاقات التكرارية للعزوم وذلك لما لها من أهمية لأي باحث مبتدأ في هذا الموضوع ومن ثم استخدام هذه العلاقات لإيجاد العزوم لبعض التوزيعات الاحتمالية المتصلة (مثل توزيع دالة القوى و توزيع وايبل و توزيع باريتو وتوزيع القيمة المتطرفة المعمم)، لما لهذه التوزيعات من أهمية كبيرة في كثير من المجالات التطبيقية كالاستدلال الإحصائي و اختبارات الحياة وكذلك دراسة الإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة (Dual generalized order statistics) كنموذج موحد يضم المتغيرات العشوائية المرتبة ترتيباً تناقصياً، وفهم القواسم المشتركة بين النموذجين.

و الرسالة في مضمونها تتكون من أربعة أبواب مقسمة على النحو التالي:

الباب الأول:

اشتمل على المفاهيم الأساسية المتصلة بموضوع البحث، والتعرف علي نماذج الإحصاءات المرتبة المعممة بشئ من التفصيل وكيف أن دالة الكثافة المشتركة داخل كل نموذج من هذه النماذج كانت هي المفتاح الذي أتاح ضم كل هذه النماذج في نموذج موحد واستعراض بعض الدراسات السابقة المتعلقة بموضوع البحث.

الباب الثاني:

في هذا الباب تم دراسة:

- نظرية التوزيع للإحصاءات المرتبة المعممة في الحالة الخاصة $m_1 = \ldots = m_{n-1} = m$
- العزوم المفردة وفروق العزوم و العلاقات التكرارية لعزوم الإحصاءات المرتبة المعممة في الحالة الخاصة $m_1 = \ldots = m_{n-1} = m$.

- العزوم للإحصاءات المرتبة المعممة المأخوذة من توزيعات احتمالية خاصة(توزيع دالة القوى و توزيع وايبيل و توزيع باريتو)، وقد حصلنا منها على العزوم المناظرة في حالة الإحصاءات المرتبة العادية و القيم المسجلة العليا من الرتبة k كحالات خاصة.

الباب الثالث:

وقد قمنا في هذا الباب بالتالي:

- دراسة الإحصاءات المرتبة المعممة في الحالة العامة وهي أعم من التي قمنا بدراستها في الباب الثاني حيث تم إسقاط القيد $m_1 = ... = m_{n-1} = m$.
- دراسة العزوم للإحصاءات المرتبة المعممة المأخوذة من توزيعات احتمالية خاصة.

الباب الرابع:

في هذا الباب تم دراسة الموضوعات التالية:

- مفهوم الإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة في الحالة العامة.
- العزوم و العلاقات التكرارية لعزوم الإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة
- العلاقات التي تربط بين كلا النموذجين (الإحصاءات المرتبة المعممة و الإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة).مع ذكر بعض الأمثلة لتوضيح استخدام هذه العلاقات.

المشرف على الرسالة	الطالبة
د/ مجدي السيد محمد العدل	رانيا مصطفى محمد علي حريري

فهرس المحتويات

فهرس الجداول

الْبَابُ الأَوَّلُ

مُقَدِّمَةٌ

Introduction

الباب الأول

مقدمة

مقدمة:

تعتبر الإحصاءات المرتبة العادية (Ordinary Order Statistics) و القيم المسجلة العادية (Ordinary Record Values) من الأدوات الهامة لبناء النماذج الرياضية Mathematical Models و التي تستخدم في قطاع عريض من التطبيقات و خاصة الاستدلال الإحصائي Statistical Inference ،حيث تستخدم لوصف متغيرات عشوائية مرتبة، ومن ثم فإن التوزيع المشترك لـــ n من الإحصاءات المرتبة أو n من القيم المسجلة تكون معرفة داخل مخروط ذو البعد n من الفراغ الإقليدي R^n ، ويعتبر نموذ ج الإحصاءات المرتبة العادية و القيم المسجلة العادية من النماذج المعروفة جيداً لقطاع عريض من المتخصصين في علم الإحصاء، وقد استخدمت عدة نماذج أخرى من المتغيرات العشوائية المرتبة وهي الإحصاءات المرتبة المتتابعة (Sequential Order Statistics) ، و الإحصاءات المرتبة بحجم عينة عدد غير صحيح (Order Statistics with non-integer Sample Size)، و القيم المسجلة من الرتبة k (k th Record Values)، والقيم المسجلة للعالم Pfeifer (Pfeifer's Record Model), وكذلك القيم المسجلة – k_nمن توزيعات غير متطابقة . و يمكن استخدام النماذج السابقة بفاعلية في العديد من التطبيقات و خاصة في نظرية الصلاحية (Reliability Theory). وقد لاحظ العالم الألماني Kamps وجود تشابه في دوال الكثافة المشتركة لبعض النماذج السالفة الذكر، ومن ثم قام بتطويع دوال الكثافة المشتركة في باقي النماذج. وقد تمكن Kamps عام (1995 a,b) من صياغة نموذج معمم يضم المتغيرات العشوائية المرتبة، وقد عُرف هذا النموذج بالإحصاءات المرتبة المعممة.

وسيحتوي هذا الباب على بعض المفاهيم الأساسية و العلاقات المهمة الضرورية لفهم موضوع الإحصاءات المرتبة المعممة، كما يحتوي على بعض الدراسات السابقة المتصلة و المتعلقة بموضوع الدراسة.

(1.1) نماذج المتغيرات العشوائية المرتبة Models of Ordered Random Variables

تعتبر المتغيرات العشوائية المرتبة أداة من الأدوات المهمة في بناء النماذج الرياضية، حيث أنه في كثير من مجالات الحياة، يمكننا عرض المشاهدات في ترتيب تصاعدي أو تنازلي تبعاً للقيمة العددية و من ثم يعاد تقديمها في شكل بيانات مرتبة. ونلاحظ أن المتغيرات العشوائية المرتبة تلعب دوراً هاماً في العديد من التطبيقات العملية، ومنها على سبيل المثال لا الحصر، في مجال الصناعة حيث تؤخذ القياسات العليا أو الدنيا بعين الاعتبار من أجل الأغراض الضمانية وصلاحية المنتجات. أيضاً، في الأحداث والألعاب الرياضية، والتي لها شعبية لدى الجماهير؛ حيث أن النتائج الجيدة و الأرقام القياسية التي يحققها اللاعبو ن تستهوي وتجذب كثيراً من الناس. كما تعتبر قوائم الأفضل مبيعات مثال شائع في مسائل التسويق؛ من أجل زيادة نسبة المبيعات لسلعة ما. هذا بالإضافة لمجالات أخرى كعلم الأرصاد الجوية، وعلم الزلازل، و علوم الحاسوب، و مراقبة الجودة النوعية، و تكدس المرور في أوقات الذروة، و أقصى حمل لمنشأة خرسانية أو أقصى حمل لمحطة كهرباء، و المشاكل التي تسببها الفيضانات وكذلك الجفاف ...ألخ، و التي تظهر فيها الترتيبات التصاعدية (التنازلية).

وتوجد نماذج متنوعة للمتغيرات العشوائية المرتبة و التي يمكنها أن تصف مثل تلك المسائل السالفة الذكر. و سنعرض بعضاً منها بشيء من التوضيح في البنود التالية.

(1.1.1) الإحصاءات المرتبة العادية Ordinary order statistics

في هذا الفصل سوف نعرض بعض النتائج الأساسية للإحصاءات المرتبة العادية.

ولمزيد من النتائج و التطبيقات و البراهين يمكن الرجوع إلى ((Arnold et al.(1992) و ((David and Nagaraja(2003).

فإذا كانت $X_1, X_2, ..., X_n$ هي n من المتغيرات العشوائية المستقلة و المتطابقة التوزيع (iid)، مأخوذة من مجتمع متصل له دالة توزيع تراكمية $F(x)$، ودالة كثافة الاحتمال $f(x)$، فإن المتغيرات العشوائية المرتبة المناظرة لها $X_{1:n} \le ... \le X_{n:n}$ تعرف بالإحصاءات المرتبة العادية و تكون دالة كثافة الاحتمال المشتركة لها على الصورة:

$$f^{X_{1:n},...,X_{n:n}}(x_1, x_2, ... x_n) = n! \prod_{i=1}^{n} f(x_i), \quad -\infty < x_1 \le ... \le x_n < \infty \qquad (1.1)$$

و تعطى دالة التوزيع التراكمية للإحصاء المرتب ذي الرتبة r ، $X_{r:n}$ على الصورة:

$$F^{X_{r:n}}(x) = P(X_{r:n} \le x)$$
$$= P\big(at\,least\; r\; of\;\; the\, X_i\;are\,less\,than\,or\,equal\,to\,x\big)$$
$$= \sum_{i=r}^{n}\binom{n}{i}\big[F(x)\big]^{i}\big[\overline{F}(x)\big]^{n-i},\; 1 \le r \le n \qquad (1.2)$$

حيث أن الحد داخل المجموع هو توزيع ذي الحدين لاحتمال أن يكون بالضبط i من المتغيرات $X_1,\dots,X_n$ ، أقل من أو يساوي x . ويمكن وضع العلاقة (1.2) في صورة مكافئة على النحو:

$$F^{X_{r:n}}(x) = \big[F(x)\big]^{r}\sum_{i=0}^{n-r}\binom{n+i-1}{r-1}\big[\overline{F}(x)\big]^{i},\; 1 \le r \le n$$

حيث أن الطرف الأيمن هو مجموع احتمالات أن يكون بالضبط r من المتغيرات $X_1,\dots,X_{r+j}$ ، بالإضافة لـــ X_{r+j} أقل من أو تساوي x. توزيع ذي الحدين السالب للعلاقة (1.2) يكون على الصورة:

$$F^{X_{r:n}}(x) = F^{X_{r:n-1}}(x)) + \binom{n-1}{r-1}\big[F(x)\big]^{r}\big[\overline{F}(x)\big]^{n-r}$$

و باستخدام العلاقة بين مجموع ذي الحدين و دالة بيتا غير التامة يمكن وضع العلاقة (1.2) على الصورة:

$$F^{X_{r:n}}(x) = I_{F(x)}(r, n-r+1)$$

حيث أن $I_x(p,q) = \dfrac{1}{Beta(p,q)}\displaystyle\int_0^x t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$

وتكون دالة كثافة الاحتمال للإحصاء المرتب ذي الرتبة r، $X_{r:n}$ هي:

$$f^{X_{r:n}}(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\big[F(x)\big]^{r-1}\big[\overline{F}(x)\big]^{n-r}\; f(x)$$
$$= r\binom{n}{r}\big[F(x)\big]^{r-1}\big[\overline{F}(x)\big]^{n-r}\; f(x), \qquad 1 \le r \le n \quad (1.3)$$

حالات خاصة:

(i)- في حالة $r=1$ فإن $X_{1:n}$ هو أصغر إحصاء مرتب (Minimum Order Statistic)، و بالتالي تصبح العلاقتان $(1.2),(1.3)$ على الصورة:

$$F^{X_{1:n}}(x)=1-\left[\bar{F}(x)\right]^{n}, \qquad x\in R,$$

$$f^{X_{1:n}}(x)=n\left[\bar{F}(x)\right]^{n-1}f(x),\ x\in R.$$

(ii)- في حالة $r=n$ فإن $X_{n:n}$ هو أكبر إحصاء مرتب (maximum order statistic)، وبالتالي تصبح العلاقتان $(1.2),(1.3)$ على الصورة:

$$F^{X_{n:n}}(x)=\left[F(x)\right]^{n}, \qquad x\in R,$$

$$f^{X_{n:n}}(x)=n\left[F(x)\right]^{n-1}f(x),x\in R.$$

دالة التوزيع المشتركة $F^{X_{r:n},X_{s:n}}(x_r,x_s)$ للإحصاءين المرتبين $X_{r:n}$ و $X_{s:n}$ حيث $1\le r<s\le n$ فتعطى بالعلاقة:

$$F^{X_{r:n},X_{s:n}}(x_r,x_s)=P\left(at\,least\ r\ X_i\le x_r, at\,least\ s\ X_j\le x_s\right)$$

$$=\sum_{j=s}^{n}\sum_{i=r}^{j}P\left(exactly\,i\ X_i\le x_r, exactly\ j\ X_j\le x_s\right)$$

$$=\sum_{j=s}^{n}\sum_{i=r}^{j}\frac{n!}{(i)!(j-i)!(n-j)!}\left(F(x_r)\right)^{i}\left(F(x_s)-F(x_r)\right)^{j-i}$$

$$\times\left(\bar{F}(x_s)\right)^{n-j}\quad, \qquad x_r<x_s, \qquad (1.4)$$

و تكون دالة كثافة الاحتمال المشتركة للإحصاءين المرتبين $X_{r:n}$ و $X_{s:n}$ على الصورة:

$$f^{X_{r:n},X_{s:n}}(x_r,x_s)=C_{n,r,s}[F(x_r)]^{r-1}[F(x_s)-F(x_r)]^{s-r-1}[\bar{F}(x_s)]^{n-s}$$

$$\times f(x_r)f(x_s),\ x_r<x_s \qquad (1.5)$$

حيث: $C_{n,r,s}=\dfrac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!}$

و بصورة عامة فإن دالة الكثافة المشتركة للإحصاءات $X_{n_1:n},\dots,X_{n_k:n}$ ، $1\le n_1<\dots<n_k\le n$ ، $1\le k\le n$

$$f^{X_{n_1:n},\ldots,X_{n_k:n}}(x_1,\ldots,x_k)=C_{n,1,\ldots,k}\left(F(x_1)\right)^{n_1-1}f(x_1)\left(F(x_2)-F(x_1)\right)^{n_2-n_1-1}f(x_2)$$
$$\times\ldots\times\left(\bar{F}(n_k)\right)^{n_k-1}f(x_k),\quad -\infty<x_1<\ldots<x_k<\infty \qquad (1.6)$$

حيث $$C_{n,1,\ldots,k}=\frac{n!}{(n_1-1)!(n_2-n_1-1)!\ldots(n-n_k)!}$$

من العلاقة (1.5) يمكن إثبات بسهولة أن دالة كثافة الاحتمال للمدى بين أي إحصاءين مرتبين $X_{r:n}$ و $X_{s:n}$ تعطى على الصورة

$$f^{W_{r,s}}(w)=C_{n,r,s}\int_{-\infty}^{\infty}[F(x_r)]^{r-1}[F(x_r+w)-F(x_r)]^{s-r-1}[\bar{F}(x_r+w)]^{n-s}$$
$$\times f(x_r)f(x_r+w)dx \qquad ,w=x_r-x_s \qquad (1.7)$$

حالات خاصة:

(i)- بوضع $r=1,s=n$ في العلاقة (1.5) نحصل على دالة كثافة الاحتمال المشتركة لأصغر وأكبر الإحصاءات المرتبة على الصورة:

$$f^{X_{1:n},X_{n:n}}(x_1,x_n)=n(n-1)[F(x_n)-F(x1)]^{n-2}f(x_1)f(x_n),-\infty<x_1<x_n<\infty$$

ومن العلاقة (1.7) نحصل على دالة كثافة الاحتمال للمدى W على الصورة

$$f^{W}(w)=C_{n,r,s}\int_{-\infty}^{\infty}[F(x+w)-F(x)]^{n-2}\ f(x)f(x+w)dx$$

(ii)- بوضع $r=i,s=i+1$ في العلاقة (1.5) نحصل على دالة كثافة الاحتمال المشتركة لإحصاءين مرتبين متتاليين على الصورة:

$$f^{X_{i:n},X_{i+1:n}}(x_i,x_{i+1})=C_{i,n}\ [F(x_i)]^{i-1}[1-F(x_{i+1})]^{n-i-1}f(x_i)f(x_{i+1}),$$
$$-\infty<x_i<x_{i+1}<\infty,$$

حيث: $$C_{i,n}=\frac{n!}{(i-1)!(n-i-1)!}$$

من العلاقة (1.6) يمكننا الحصول على دالة كثافة الاحتمال المشروطة المشتركة للإحصاءات $X_{r+1:n},\ldots,X_{s-1:n}$ بشرط $X_{i:n}=x_i$ ، $i\le r\, and\, i\ge s$ على الصورة

$$f^{X_{r+1:n},\ldots,X_{s-1:n}|X_{i:n}=x_i,i\le r,i\ge s}(x_{r+1},\ldots,x_{s-1})=(s-r-1)!\prod_{j=r+1}^{s-1}\frac{f(x_j)}{F(x_s)-F(x_r)},$$
$$x_1<\ldots<x_n \quad (1.8)$$

نظرية(1.1)

لعينة عشوائية حجمها n من مجتمع متصل، فإن التوزيع المتصل للإحصاءات المرتبة $X_{r+1:n},\ldots,X_{s-1:n}$ بشرط $X_{i:n}=x_i$ ، $i\le r\,and\,i\ge s$ ، حيث $r<s$ هو نفس التوزيع للإحصاءات المرتبة في عينة حجمها $s-r-1$ مسحوبة من مجتمع له دالة كثافة الاحتمال $\dfrac{f(x)}{F(x_s)-F(x_r)}$ ، $x_r<x<x_s$.

كحالة خاصة من العلاقة (1.8)، بما أن $X_{r+1:n},\ldots,X_{s-1:n}$ مستقلة عن $X_{1:n},\ldots,X_{r-1:n}$ و $X_{s+1:n},\ldots,X_{n:n}$،فإنه عندما تكون $X_{r:n}$ و $X_{s:n}$ معطى، يكون الشرط السابق فقط على أصغر إحصاء مرتب ، نستنتج من العلاقة(1.8) أن

$$f^{X_{r+1:n},\ldots,X_{n:n}|\; X_{1:n}=x_1,\ldots,X_{r:n}=x_r}(x_{r+1},\ldots,x_n)=f^{X_{r+1:n},\ldots,X_{n:n}|\; X_{r:n}=x_r}(x_{r+1},\ldots,x_n)$$

التوزيع المشروط للإحصاء المرتب $X_{r+1:n}$ بشرط $X_{r:n}=x_r$ يكون

$$f^{X_{r+1:n}|\; X_{r:n}=x_r}(x_{r+1})=(n-r)\left(\frac{\bar F(x_{r+1})}{\bar F(x_r)}\right)^{n-r-1}\frac{f(x_{r+1})}{\bar F(x_r)},\;\; x_{r+1}>x_r$$

التوزيع المشروط للإحصاء المرتب $X_{r:n}$ بشرط أن $X_{s:n}=x_s$ يعطى بالعلاقة

$$f^{X_{r:n}|X_{s:n}=x_s}(x_r)=\frac{(s-1)!}{(r-1)!(s-r-1)!}\left(\frac{F(x_r)}{F(x_s)}\right)^{r-1}\left(\frac{F(x_s)-F(x_r)}{F(x_s)}\right)^{s-r-1}$$
$$\times\frac{f(x_r)}{f(x_s)},\quad 1\le r<s,\quad x_r<x_s$$

راجع ((Arnold et al(1992)).

و يمكن أن تصاغ الإحصاءات المرتبة العادية على صورة سلسلة ماركوف (Markov chain) باحتمالات الانتقال،

$$P\big(X_r>t|\;X_{r-1}=s\big)=\left(\frac{\bar F(t)}{\bar F(s)}\right)^{n-r+1},\;\; 2\le r\le n$$

وللحصول على العزوم المختلفة للإحصاءات المرتبة العادية، يمكننا استخدام العلاقة (1.3)
فنحصل على العزم من رتبة α للإحصاء المرتب $X_{r:n}$ على الصورة:

$$\mu_{r:n}^{(\alpha)} = E[X_{r:n}^{\alpha}]$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^{\alpha} f^{X_{r:n}}(x)dx$$
$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_{-\infty}^{\infty} x^{\alpha}[F(x)]^{r-1}[1-F(x)]^{n-r} f(x)dx$$

حيث $\alpha = 1,2,...$

و للحصول على العزوم المختلطة للإحصاءين المرتبين $X_{r:n}$ و $X_{s:n}$ نستخدم العلاقة (1.5) فنحصل على :

$$\mu_{r,s:n}^{(\alpha,\beta)} = E[X_{r:n}^{\alpha} X_{s:n}^{\beta}]$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x_r}^{\infty} x_r^{\alpha} x_s^{\beta} f^{X_{r:n}}(x_r, x_s)dx_s dx_r$$
$$= C_{n,r,s} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x_r}^{\infty} x_r^{\alpha} x_s^{\beta}[F(x_r)]^{r-1}[F(x_s)-F(x_r)]^{s-r-1}$$
$$\times[1-F(x_s)]^{n-s} dx_s dx_r,$$

حيث: $C_{n,r,s} = \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!}$، $\alpha, \beta = 1,2,...$

وقد درس الكثير من الباحثين العلاقات التكرارية بين عزوم الإحصاءات المرتبة العادية، ويكون عادة الهدف الأساسي من هذه العلاقات هو اختزال عدد الحسابات المطلوبة لإيجاد العزوم المختلفة بشكل مستقل. وهي تعطي نتائج دقيقة، وبالتالي نوفر الكثير من الجهد والوقت.

ومن أشهر وأهم العلاقات التكرارية لعزوم الإحصاءات المرتبة العادية هي

$$(n-r)\mu_{r:n}^{(\alpha)} + r\mu_{r+1:n}^{(\alpha)} = n\mu_{r:n-1}^{(\alpha)}$$

لأي دالة توزيع اختيارية F، حيث $r = 1,...,n-1$ و $\alpha = 1,2,...$. (Cole(1951))

و من الجدير بالذكر أن العلاقة محققة لأي دالة $g(X)$ أي أن

$$(n-r)E(g(X_{r:n})) + rE(g(X_{r+1:n})) = nE(g(X_{r:n-1}))$$

(1.1.2)القيم المسجلة (Record values)

يرجع الفضل في صياغة نموذج القيم المسجلة **(**Record Values**)** و دراسة خصائصه الأساسية إلى العالم Chandler حيث كانت البداية في عام (1952) وكان ذلك من أجل صياغة نموذج رياضي يمكن من خلاله التعامل مع درجات الحرارة المتطرفة، وللقيم المسجلة العديد من التطبيقات، خاصة في نظرية التقدير (Estimation Theory) و نظرية الصلاحية (Reliability Theory). ومن الأمثلة (الواضحة للمتخصصين وغير المتخصصين) تطبيقات القيم المسجلة في المجال الرياضي وخاصة في الدورات الأوليمبية حيث نسمع كثيراً لفظ "تحطم الرقم القياسي السابق" وكذلك في بعض أنواع الكوارث الطبيعية مثل الزلازل والبراكين والأعاصير و الفيضانات(قد تؤدي إلى ارتفاع منسوب المياه في النهر إلى رقم غير مسبوق). معظم نتائج هذا الفصل تم اقتباسها من ((Arnold, et al (1998) والمراجع بداخله.

تعريف (1.1) (**القيم المسجلة و الأزمنة المسجلة**)

تُعرّف القيم المسجلة، على أنها نموذج للقيم المتطرفة المتعاقبة في متتابعة من المتغيرات العشوائية المستقلة و المتطابقة التوزيع. فإذا فرضنا أن $\{X_j\}_{j\in N}$ هي متتابعة من المتغيرات العشوائية المستقلة و المتطابقة التوزيع وكانت $f(x), F(x)$ هما دالتا التوزيع التراكمية وكثافة الاحتمال على الترتيب للمتغير العشوائي X، فإن المشاهدة X_j تسمى قيمة مسجلة عليا (Upper Record Value) إذا كانت قيمتها أكبر من كل المشاهدات السابقة. أي أن X_j تكون قيمة مسجلة عليا إذا كان:

$$X_j > X_i, \qquad \forall\, i < j.$$

وتعرّف متتابعة الأزمنة المسجلة (Record Times Sequence) على النحو التالي:

$$L(1) = 1$$

$$L(n+1) = \min\{\, j : j > L(n) : X_j > X_{L(n)}\}, \qquad n \in N$$

وتعرّف سلسلة القيم المسجلة العليا $\{R_n\}$ على النحو التالي:

$$R_n = X_{L(n)}, \qquad n = 1,2,\ldots$$

و دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للقيم المسجلة العليا $R_1, R_2, \ldots, R_n$ تأخذ الصورة:

$$f^{R_1,R_2,\ldots R_n}(x_1,x_2,\ldots x_n)=f(x_n)\prod_{r=1}^{n-1}h(x_r),\quad -\infty<x_1<\ldots<x_n<\infty,\ (1.9)$$

حيث $\bar{F}(x)=1-F(x)$ ، $h(x)=\dfrac{f(x)}{\bar{F}(x)}$ ، هي دالة معدل الفشل (Failure Rate Function) ، ودالة الكثافة الهامشية للقيمة المسجلة العليا R_r هي:

$$f^{R_r}(x)=\frac{[D(x)]^{r-1}}{(r-1)!}\,f(x),\qquad -\infty<x<\infty. \qquad (1.10)$$

حيث:

$$D(x)=-\ln\bar{F}(x),\qquad 0<\bar{F}(x)<1$$

و دالة الكثافة المشتركة للقيمتين المسجلتين R_r و R_s هي:

$$f^{R_r,R_s}(x_r,x_s)=\frac{1}{(r-1)!(s-r-1)!}\big(D(x_s)\big)^{r-1}\big(D(x_s)-D(x_r)\big)^{s-r-1}$$
$$\times h(x_r)f(x_s),\qquad -\infty<x_r<x_s<\infty \qquad (1.11)$$

يمكن أن تمثل القيم المسجلة في صورة سلسلة ماركوف باحتمالات الانتقال

$$P\big(R_r>t\mid R_{r-1}=s\big)=\frac{\bar{F}(t)}{\bar{F}(s)},\ r\geq 2$$

و باستخدام العلاقة(1.10) فإن العزم من الرتبة α للقيم المسجلة العليا R_r يعطى بالعلاقة:

$$\mu_r^{\alpha}=E[R_r^{\alpha}]=\frac{1}{(r-1)!}\int_{-\infty}^{\infty}x^{\alpha}\big(D(x)\big)^{r-1}f(x)dx$$

و العزوم المختلطة للقيمتين المسجلتين العلويتين R_r و R_s تعطى بالعلاقة:

$$\mu_{r,s}^{(\alpha,\beta)}=E[R_r^{\alpha}R_s^{\beta}]$$
$$=\frac{1}{(r-1)!(s-r-1)!}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{x_r}^{\infty}x_r^{\alpha}x_s^{\beta}\big(D(x_r)\big)^{r-1}\big(D(x_s)-D(x_r)\big)^{s-r-1}$$
$$\times h(x_r)f(x_s)dx_s dx_r.$$

في بعض الأحيان، تكون ثاني أو ثالث أكبر قيمة من قيم مشاهدات ظاهرة ما ، هي موضع الاهتمام و بالتالي يكون لدينا ما يعرف بالقيمة المسجلة من الرتبة الثانية

$(2^{nd}\ record)$، أو القيم المسجلة من الرتبة الثالثة $(3^{rd}\ record)$، وهكذا. وعليه يمكننا استخدام نموذج القيم المسجلة من الرتبة k $(k^{th} record)$.

فإذا كانت $(X_i)_{i\in N}$ سلسلة لا نهائية من المتغيرات العشوائية المستقلة و المتطابقة التوزيع مأخوذة من مجتمع متصل له دالة توزيع تراكمية $F(x)$، وكان k عدداً صحيحاً موجباً. فإن المتغيرات العشوائية $L^{(k)}(r)$ المعرفة كالآتي:

$$L^{(k)}(1) = k$$

$$L^{(k)}(r+1) = \min\{\ j \in N : j > L^{(k)}(r); X_{j,j+k-1} > X_{L^{(k)}(r),L^{(k)}(r)+k-1}\}, r \in N$$

تعرف بالأزمنة المسجلة العليا من الرتبة k.

وتكون $\{R_r^{(k)}, r > 0\}$، حيث $r = 1,2,...$ $R_r^{(k)} = X_{L^{(k)}(r),L^{(k)}(r)+k-1}$، هي سلسلة القيم المسجلة العليا من الرتبة k.

و دالة الكثافة المشتركة للقيم المسجلة العليا $R_1^{(k)},...,R_n^{(k)}$ هي:

$$f^{R_1^{(k)},...,R_n^{(k)}}(x_1,...,x_n) = k^n\left(\prod_{r=1}^{n-1} h(x_r)\right)[\overline{F}(x_n)]^{k-1} f(x_n),$$
$$-\infty < x_1 < ... < x_n < \infty, \qquad (1.12)$$

و دالة الكثافة الهامشية للقيمة المسجلة العليا $R_r^{(k)}$ هي:

$$f^{R_r^{(k)}}(x) = \frac{k^r}{(r-1)!}\left(D(x)\right)^{r-1}\left(\overline{F}(x)\right)^{k-1} f(x), \qquad -\infty < x < \infty \qquad (1.13)$$

و دالة الكثافة المشتركة للقيمتين المسجلتين العلويتين $R_r^{(k)}$ و $R_s^{(k)}$، حيث $r < s$ هي:

$$f^{R_r^{(k)},R_s^{(k)}}(x_r, x_s) = \frac{k^s}{(r-1)!(s-r-1)!}\left(D(x_r)\right)^{r-1}\left(D(x_s) - D(x_r)\right)^{s-r-1}$$
$$\times h(x_r)\left(\overline{F}(x_s)\right)^{k-1} f(x_s), \qquad -\infty < x_r < x_s < \infty \qquad (1.14)$$

يمكن أن تمثل القيم المسجلة من الرتبة k في صورة سلسلة ماركوف باحتمالات الانتقال

$$P\left(R_r^{(k)} > t \mid R_{r-1}^{(k)} = s\right) = \left(\frac{\overline{F}(t)}{\overline{F}(s)}\right)^k, \ r \ge 2$$

و يمكننا إيجاد العزم من الرتبة α للقيمة المسجلة $R_r^{(k)}$ باستخدام العلاقة (1.13) على النحو التالي:

$$E[(R_r^{(k)})^{\alpha}] = \frac{k^r}{(r-1)!}\int_{-\infty}^{\infty} x^{\alpha}\left(D(x)\right)^{r-1}\left(1-F(x)\right)^{k-1} f(x)dx$$

و كذلك باستخدام العلاقة (1.14)، يمكننا إيجاد العزوم المختلطة للقيمتين المسجلتين العلويتين $R_s^{(k)}, R_r^{(k)}$ على النحو:

$$E\left[\left(R_r^{(k)}\right)^{\alpha}\left(R_s^{(k)}\right)^{\beta}\right]$$

$$= \frac{k^s}{(r-1)!(s-r-1)!}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{x_r}^{\infty} x_r^{\alpha} x_s^{\beta}\left(D(x_r)\right)^{r-1}\left(D(x_s)-D(x_r)\right)^{s-r-1}$$

$$\times h(x_r)\left(\bar{F}(x_s)\right)^{k-1} f(x_s)dx_s dx_r$$

و بطريقة مماثلة يمكننا تعريف القيم المسجلة الدنيا (Lower Record Values) . فإذا كانت $\{X_j\}_{j\in N}$ متتابعة من المتغيرات العشوائية المستقلة و المتطابقة التوزيع وكانت $f(x), F(x)$ دالة التوزيع التراكمية،ودالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X على التوالي. فإن المشاهدة X_j تسمى قيمة مسجلة دنيا إذا قلت قيمتها عن كل قيم المشاهدات السابقة، بمعنى أن X_j قيمة مسجلة دنيا إذا كان $X_j < X_i$ لكل $i < j$.

و بالتالي فإن الأزمنة المسجلة الدنيا $\{L^*(r), r \geq 1\}$ تعرّف كالآتي:

$$L^*(1) = 1$$

$$L^*(r+1) = \min\{ j : j > L^*(r); X_j < X_{L^*(r)}\}$$

وتعرّف سلسلة القيم المسجلة الدنيا $\{R_r^*\}$ على النحو التالي:

$$R_r^* = X_{L^*(r)}, \qquad r = 1,2,\ldots$$

و دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للقيم المسجلة الدنيا $R_1^*, R_2^*, \ldots, R_n^*$ هي:

$$f_{R_1^*,\ldots,R_n^*}(x_1,\ldots,x_n) = f(x_n)\prod_{r=1}^{n-1} h^*(x_r), \qquad -\infty < x_n < \ldots < x_1 < \infty$$

حيث $h^*(r)=\dfrac{f(r)}{F(x)}$

ودالة الكثافة الهامشية للقيمة المسجلة الدنيا R_r^* هي:

$$f_{R_r^*}(x)=\frac{\left[D^*(x)\right]^{r-1}}{(r-1)!}\ f(x), \qquad -\infty<x<\infty \qquad (1.15)$$

حيث أن:

$$D^*(x)=-\ln F(x)$$

و دالة الكثافة المشتركة للقيمتين المسجلتين الدنيوتين R_r^* و R_s^* حيث $r<s$ هي:

$$f^{R_r^*,R_s^*}(x_r,x_s)=\frac{1}{(r-1)!(s-r-1)!}\left(D^*(x_s)\right)^{r-1}\left(D^*(x_r)-D^*(x_s)\right)^{s-r-1}$$

$$\times h^*(x_r)f(x_s), \qquad -\infty<x_s<x_r<\infty. \qquad (1.16)$$

و لمزيد من التفاصيل يمكن الرجوع إلى ((Arnold, et al (1998) والمراجع بداخله.

(1.1.3) الإحصاءات المرتبة المتعاقبة Sequential order statistics

تعريف (1.2) (Kamps 1995 a,b)

لنفرض أن $n\in N$ و $F_1,...,F_n$ ، دوال توزيع تراكمية بحيث أن $F_1^{-1}(1)\le...\le F_n^{-1}(1)$ ،

وبفرض أن $(Y_j^{(r)})_{1\le r\le n,\ 1\le j\le n-r+1}$ ، متغيرات عشوائية مستقلة بحيث أن:

$$Y_j^{(r)}\sim F_r, 1\le r\le n, 1\le j\le n-r+1$$

لأي $1\le j\le n$ نفرض أن

$$X_j^{(1)}=Y_j^{(1)}$$

$$X_*^{(1)}=\min_{1\le j\le n} X_j^{(1)}$$

و $r\in\{2,..,n\}$ نفرض أن $X_*^{(r)}=\min\limits_{1\le j\le n-r+1} X_j^{(r)}$

حيث $X_j^{(r)}=F_r^{-1}\left\{F_r\ (Y_j^{(r)})\left(1-F_r\left(X_*^{(r-1)}\right)\right)+F_r\left(X_*^{(r-1)}\right)\right\},\ 1\le j\le n$

فإن المتغيرات العشوائية $X_*^{(1)},...,X_*^{(n)}$ ، تعرف بالإحصاءات المرتبة المتعاقبة على أساس $F_1,...,F_n$.

وقد أعاد (Cramer and Kamps 2003)، تعريف الإحصاءات المرتبة المتعاقبة على النحو التالي:

بفرض أن $n \in N$ و $F_1,...F_n$ دوال توزيع تراكمية حيث $F_1^{-1}(1) \le ... \le F_n^{-1}(1)$.

ولنفرض أن: $X_*^{(0)} = -\infty$ وباعتبار أن $V_1,...,V_n$ متغيرات عشوائية مستقلة تتبع توزيع بيتا، $V_r \sim Beta(n-r+1,1),\ \ 1 \le r \le n$. فإن المتغيرات العشوائية $X_*^{(r)} = F_r^{-1}(X^{(r)})$ ، حيث أن:

$$X^{(r)} = 1 - V_r \bar{F}(X_*^{(r-1)}), \qquad 1 \le r \le n$$

تعرف بالإحصاءات المرتبة المتعاقبة على أساس دوال التوزيع $F_1,...F_n$. وتكون دالة الكثافة المشتركة لأول r إحصاءات مرتبة متعاقبة هي:

$$f^{X_*^{(1)},...,X_*^{(r)}}(x_1,...,x_r) = \frac{n!}{(n-r)!}\prod_{j=1}^{r}\left[\frac{f_j(x_j)}{\bar{F}_j(x_{j-1})}.\left(\frac{\bar{F}_j(x_j)}{\bar{F}_j(x_{j-1})}\right)^{n-j}\right]$$
$$, x_1,...,x_r \qquad (1.17)$$

و يمكن أن نمثل الإحصاءات المرتبة المتعاقبة على صورة سلسلة ماركوف باحتمالات الانتقال

$$P\left(X_*^{(r)} > t \middle|\ X_*^{(r-1)} = s\right) = \left(\frac{\bar{F}_r(t)}{\bar{F}_r(s)}\right)^{n-r+1}, 2 \le r \le n.$$

لمزيد من المعلومات يمكن الرجوع إلى ((Cramer(2003)

(1.1.4) العينات المراقبة Censored samples

تظهر أهمية العينات المراقبة في نظرية الصلاحية (Reliability theory)، و اختبارات الحياة (Life testing) ، وتحليل البقاء (Survival analysis) وكذلك في التجارب الطبية. فإذا أخذنا n من الوحدات وتم وضعها تحت الاختبار في أحد التجارب، وتم تسجيل زمن التعطل لبعض وحدات العينة وليس كل الوحدات. فإننا نقول أن العينة مراقبة. ويعتبر استخدام هذه العينات هو الأنسب من الناحية العملية، توفيراً للوقت والجهد و التكاليف.

وقد تختلف أنواع العينات المراقبة التي يمكننا التعامل معها في تجارب الحياة العملية المختلفة، فقد يكون عامل الوقت مهم في بعض هذه التجارب، لذا نلجأ إلى إيقاف التجربة بعد وقت

محدد، وفي هذه الحالة تكون عينة المشاهدات غير كاملة (عينة مراقبة). كما أنه قد نرغب في تجارب أخرى، وذلك بهدف تقليل التكاليف ، حيث أن الوحدات المستخدمة في التجربة قد تكون باهظة الثمن، وبالتالي فإننا نلجأ لإنهاء التجربة بعد تسجيل زمن التعطل لعدد معين من وحدات التجربة، وبالتالي نحصل أيضاً على عينة غير كاملة(مراقبة).وسوف نذكر هنا بعض أهم أنواع العينات المراقبة.

- **العينة المراقبة من النوع الأول Type I censored sample**

لنفرض أن عينة عشوائية حجمها n من الوحدات، تم وضعها تحت الاختبار وتم إنهاء التجربة بعد زمن محدد t. فإن عدد المشاهدات X التي تم تسجيلها حتى الزمن t يكون متغيراً عشوائياً. و المشاهدات المسجلة تمثل عينة مراقبة من النوع الأول.

- **العينة المراقبة من النوع الثاني Type II censored sample**

لنفرض أن عينة عشوائية حجمها n من الوحدات، تم وضعها تحت الاختبار وتم إنهاء التجربة بعد تسجيل زمن التعطل لعدد m من المشاهدات الأولى حيث $m < n$ ، وتظل باقي الوحدات $n-m$ تعمل. فإن عينة المشاهدات التي تم تسجيلها ذات الحجم m تعرف بالعينة المراقبة من النوع الثاني. مع الأخذ في الاعتبار أن زمن إنهاء هذه التجربة يكون متغيراً عشوائياً.

لتوضيحات أكثر عن أنواع العينات المراقبة المختلفة و تطبيقاتها، يمكن الرجوع إلى Cohen and Whitten(1988) و Cohen(1991) و Balakrishnan and Cohen(1991).

- **العينة ذات المراقبة التتابعية من النوع الثاني**

Progressively type-II censored sample

في العينات المراقبة التتابعية يمكننا سحب الوحدات تحت الاختبار على مراحل متعددة بشكل عشوائي وذلك إما لوقوع حادث مفاجئ يتطلب استبعاد هذه الوحدة أو سحبها لاستخدامها في تجربة أخرى مما يوفر الجهد والتكاليف. ولتوضيح فكرة العينات المراقبة التتابعية نعرض المثال التالي:

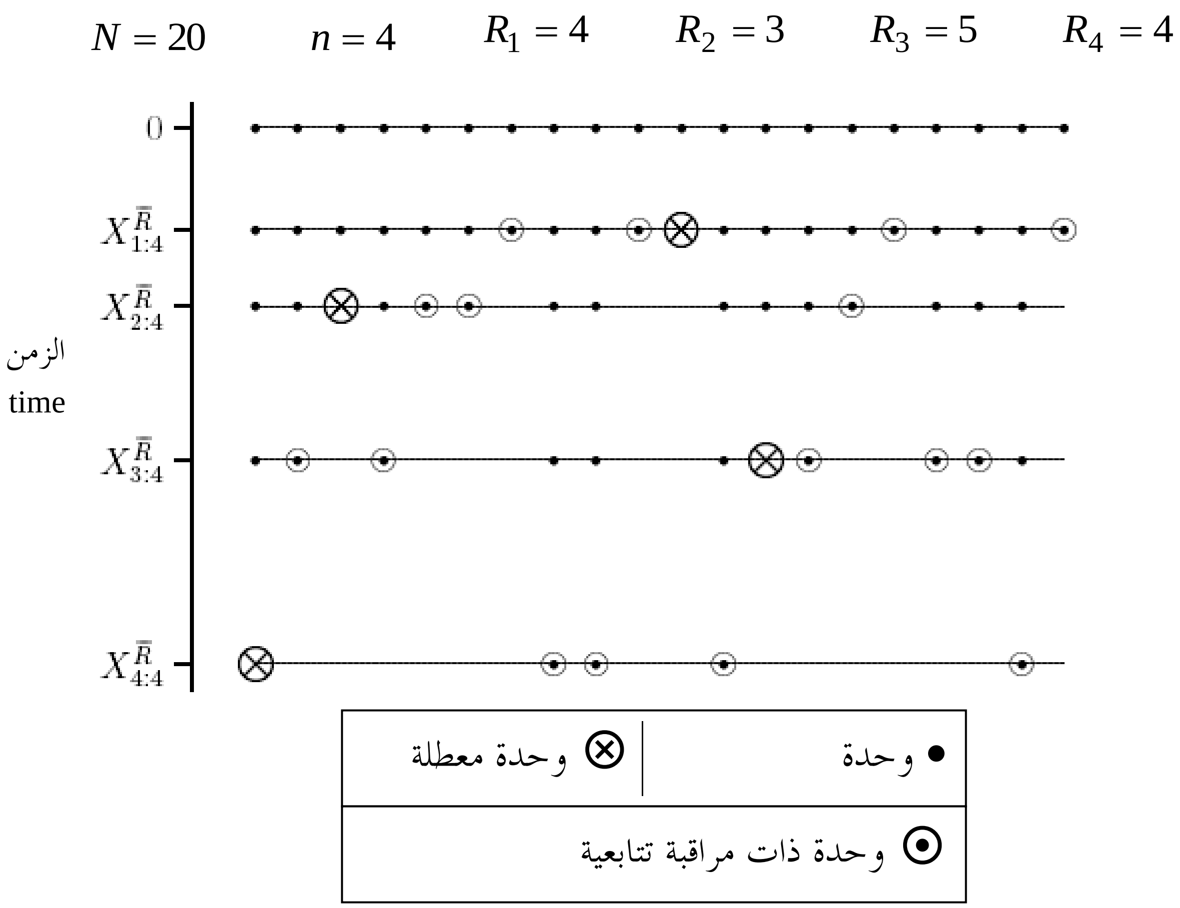
لنفرض أنه تم وضع N من الوحدات المتماثلة تحت الاختبار فإنه عند تسجيل زمن التعطل الأول $X_{1:n}^{\tilde{R}}$ ، يتم سحب عشوائياً من التجربة R_1 من الوحدات المتبقية و التي عددها $(N-1)$. وعند تسجيل زمن التعطل الثاني $X_{2:n}^{\tilde{R}}$ ، يتم أيضاً سحب عشوائياً R_2 من

الوحدات المتبقية وعددها $(N-2-R_1)$. وهكذا عند زمن التعطل رقم n ، $X_{n:n}^{\tilde{R}}$ ، يتم سحب الوحدات المتبقية من التجربة ويكون عددها

$R_n = N - n - R_1 - R_2 - \ldots - R_{n-1}$.

العينة الناتجة $X_{1:n,N}^{\tilde{R}},\ldots,X_{n:n,N}^{\tilde{R}}$ ، حيث $\tilde{R}=(R_1,\ldots,R_n)$ ، هي العينة المراقبة التتابعية من النوع الثاني ذات الحجم n و المرتبطة بنظام المراقبة $\tilde{R}$ ، من عينة مشاهدات مختارة حجمها N.

الشكل (1-1) يوضح مثالاً عددياً لعينة ذات مراقبة تتابعية.(Cramer2003)



هناك العديد من النماذج المراقبة التي نستطيع أن نصفها بواسطة الإحصاءات المرتبة.

(1.1.5) الإحصاءات المرتبة المراقبة التتابعية من النوع الثاني

progressive type II censoring order statistics

لنفرض أن $X_1,\ldots,X_N$ عينة عشوائية من أزمنة الحياة لـــ N من العناصر المستقلة والمتطابقة التوزيع لها دالة توزيع تراكمية متصلة F ، ودالة كثافة الاحتمال f ، فإنه في زمن

التعطل رقم R_1 ، تكون المشاهدات $x_1 \leq \ldots \leq x_{R_1}$. وفي زمن التعطل رقم R_2 تصبح المشاهدات $x_{R_1+1} \leq \ldots \leq x_{R_1+R_2}$ ، و بالتالي فإن دالة كثافة الاحتمال المشتركة لأزمنة التعطل ذات المراقبة التتابعية $X_{1:n,N}^{\tilde{R}}, \ldots, X_{n:n,N}^{\tilde{R}}$ هي:

$$f^{X_{1:n;N}^{\tilde{R}}, \ldots, X_{n:n;N}^{\tilde{R}}}(x_1, \ldots, x_n) = \left(\prod_{1=1}^{n} \gamma_j \right) \prod_{j=1}^{n} f(x_j) \left[\bar{F}(x_j) \right]^{R_j}, x_1 \leq \ldots \leq x_n \quad (1.18)$$

حيث

$$n \in N, \; N = n + \sum_{j=1}^{n} R_j \, , \, R_j \in N_o$$

$$\gamma_j = N - \sum_{v=1}^{j-1} R_v - j + 1, \quad 1 \leq j \leq n$$

ملاحظة(1.1)

لنفرض أن $X_{1:n}^{\tilde{R}} \leq \ldots \leq X_{n:n}^{\tilde{R}}$ هي أزمنة الحياة للوحدات المعطلة(المشاهدات كاملة)، وكحالة خاصة عندما $\tilde{R} = (0, \ldots, 0)$ ، أي أنه إذا لم يتم سحب أي وحدة خلال التجربة فإن النموذج يؤول إلى نموذج الإحصاءات المرتبة العادية. وتؤل العلاقة (1.18) إلى العلاقة (1.1) .

(1.1.6) نموذج تسجيلات Pfeifer (Pfeifer's record model)

يعتمد نموذج هذه التسجيلات على متسلسلة مزدوجة (Double Sequence) لمتغيرات عشوائية غير متطابقة التوزيع (Non- identically Distributed). بمعنى أن دوال التوزيع للمتغيرات العشوائية يمكن أن تتغير بعد حدوث كل تسجيل.

تعريف (1.3) (Pfeifer 1979)

بفرض أن $\left\{X_j^{(n)}\right\}_{n, j \in N}$ هي متسلسلة مزدوجة من المتغيرات العشوائية حيث

$$P^{X_j^{(n)}} = P^{X_1^{(n)}} \, , \quad n, j \in N$$

فإن أزمنة دخول التسجيلات تعرف على الصورة:

$$\Delta_1 = 1,$$

$$\Delta_{n+1} = \min\{ \, j \in N; X_j^{(n+1)} > X_{\Delta_n}^{(n)} \}, \; n \in N$$

و تكون القيم المسجلة هي $X_{\Delta_n}^{(n)}$. وتحت الشروط الملائمة ، فإن متسلسلة القفزات (Jump Times) للظهور الابتدائي، ومتسلسلة القيم المسجلة، تكون متطابقة التوزيع.

و بفرض أن F_i ، $i=1,...,n$ هي دالة التوزيع لظهور التسجيلات حتى التسجيل من الرتبة i، حيث أن $F_1,...,F_n$ ، دوال مطلقة الاتصال و f_i ، $i=1,...,n$ هي دوال الكثافة. فإن دالة الكثافة المشتركة للتسجيلات $X_{\Delta_1}^{(n)},...,X_{\Delta_n}^{(n)}$ تعطى على الصورة:

$$f^{X_{\Delta_1}^{(n)},...,X_{\Delta_n}^{(n)}}(x_1,...,x_n)=\left(\prod_{i=1}^{n-1}\frac{f_i(x_i)}{\bar{F}_{i+1}(x_i)}\right)f_n(x_n), \qquad (1.19)$$

يمكن أن يصاغ التسجيل $X_{\Delta_j}^{(j)}$ على صورة سلسلة ماركوف باحتمالات الانتقال:

$$P\left(X_{\Delta_r}^{(r)}\le t \mid X_{\Delta_{r-1}}^{(r-1)}=s\right)=\left(\frac{F_r(t)-F_r(s)}{\bar{F}_r(s)}\right)^{n-r+1}, t\ge s, F(s)<1, r\ge 2$$

و باختيار $F_1=...=F_n=F$ ، نجد أن نموذج Pfeifer يحوي القيم المسجلة العادية (1.1.2)،حيث أن القيم المسجلة العادية و من الرتبة k كما ذكرنا سابقاً تكون قائمة على متسلسلة من المتغيرات العشوائية المستقلة و المتطابقة التوزيع.

(1.1.7) الإحصاءات المرتبة المعممة Generalized order statistics

لقد لاحظ Kamps أن هناك قاسماً مشتركاً أو رابطاً في جميع دوال الكثافة المشتركة لنماذج المتغيرات العشوائية المرتبة السالفة الذكر و قد تمكن بعد جهد كبير من صياغة دالة كثافة الاحتمال مشتركة (بقيم معينة لمعالم محددة) تصلح لتمثيل جميع النماذج السابقة. أي أن المتغيرات العشوائية $r=1,...,n$ ، $U_{r;n.\tilde{m},k}$ التي لها دالة كثافة الاحتمال المشتركة على الصورة:

$$f^{U(1,n,\tilde{m},k),...,U(n,n,\tilde{m},k)}(u_1,...,u_n)=k\left(\prod_{j=1}^{n-1}\gamma_j\right)\left(\prod_{i=1}^{n-1}(1-u_i)^{m_i}\right)(1-u_n)^{k-1}$$

على المخروط ذي البعد النوني $0<u_1\le...\le u_n<1$ تعرف بالإحصاءات المرتبة المعممة المنتظمة (Uniform generalized order statistics).

وسيتم بإذن الله دراسة الإحصاءات المرتبة المعممة بشيء من التفصيل في الباب الثاني والباب الثالث.

(1.1.8) الإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة Dual generalized order statistics

المتغيرات العشوائية المرتبة ترتيباً تناقصياً لا يتضمنها نموذج الإحصاءات المرتبة المعممة السابق الذكر. لذا اقترح كلاً من Burkschat, Cramer and Kamps(2003)، نموذجاً تناقصياً معمماً يتضمن هذه المتغيرات العشوائية، و التي منها على سبيل المثال الإحصاءات المرتبة المعكوسة Reversed order statistics القيم المسجلة السفلى Lower records values. كما أوجدوا العلاقة التي تربط بين الإحصاءات المرتبة المعممة و الإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة. وقد عرف Ahsanullah (2004) المتغيرات العشوائية $X_d(1,n,m,k),...,X_d(n,n,m,k)$ بأنها الإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة على أساس دالة التوزيع F إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة هي:

$$f^{X_d(1,n,m,k),...,X_d(n,n,m,k)}(x_1,...,x_n)=\prod_{j=1}^{n}\gamma_j\left(\prod_{i=1}^{n-1}[F(x_i)]^m f(x_i)\right)$$

$$\times[F(x_n)]^{k-1}f(x_n),$$

$$F^{-1}(1)>x_1\geq...\geq x_n>F^{-1}(0),\qquad m\geq 1$$

وسيتم بإذن الله دراسة الإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة بشيء من التفصيل في الباب الرابع.

(1.2) توزيع القيمة المتطرفة المعمم

The Generalized Extreme Value Distribution

تظهر أهمية توزيع القيمة المتطرفة المعمم (GEV) في نظرية الاحتمالات و الإحصاء. ويعتبر هذا التوزيع عائلة من التوزيعات الاحتمالية المتصلة. و قد تطور من خلال نظرية القيمة المتطرفة Extreme value theory، لربط عائلة Gumbel و Fréchet وWeibull و التي تعرف بتوزيعات القيم المتطرفة من النوع الأول و الثاني و الثالث على الترتيب (Type I,II and III Extreme Value Distributions). و في نظرية القيمة المتطرفة فإن توزيع (GEV) يكون هو توزيع النهاية لأكبر قيمة مناسبة (properly normalized maxima) لسلسلة من المتغيرات العشوائية المستقلة و المتطابقة التوزيع. و لهذا يستخدم التوزيع كتقريب لنموذج أكبر قيمة لسلسلة (نهائية) من المتغيرات العشوائية.

وتعطى دالة التوزيع التراكمية لتوزيع القيمة المتطرفة المعمم $GEV(\mu,\sigma,\zeta)$ على الصورة:

$$F(x)=\exp\left\{-\left[1+\zeta\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]_{+}^{-1/\zeta}\right\},\qquad 1+\frac{\zeta(x-\mu)}{\sigma}>0$$

حيث $x_{+}=\max(x,0)$ و $\mu\in R$ هي معلمة الموضع، و $\sigma>0$ هي معلمة المقياس، و $\zeta\in R$ هي معلمة الشكل وبالتالي فإنه يكافئ:

$$F(x)=\exp\left\{-[1+\zeta x]^{-1/\zeta}\right\},\qquad 1+\zeta x>0$$

و دالة كثافة الاحتمال

$$f(x)=[1+\zeta x]^{\frac{-(1+\zeta)}{\zeta}}\cdot\exp\left\{-[1+\zeta x]^{-1/\zeta}\right\},\qquad 1+\zeta x>0$$

و من الجدير بالذكر أن ζ معلمة الشكل (shape parameter) تتحكم في سلوك نهاية التوزيع ، وباختيار $\zeta\to 0$ و $\zeta>0$ و $\zeta<0$ نحصل على التوزيعات التالية:

- (Type I Extreme Value Distribtuion) Gumbel

$$F(x;\mu,\sigma)=\exp\left\{-e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}\right\},\quad x\in R$$

- (Type II Extreme Value Distribution) Fréchet

$$F(x;\mu,\sigma,\alpha)=\begin{cases}0 & ,\ x\le\mu\\ \exp\left[-\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\alpha}\right] & ,\ x>\mu\end{cases}$$

- (Type III Extreme Value Distribution) Reversed Weibull

$$F(x;\mu,\sigma,\alpha)=\begin{cases}\exp\left[-\left(-\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^{\alpha}\right] & ,\ x<\mu\\ 1 & ,\ x\ge\mu\end{cases}$$

جدول (1-1): التوزيعات الاحتمالية الخاصة من توزيع القيم المتطرفة المعمم.

σ	μ	ζ	$F(x)$	distribution
1	0	0	$=\exp\{-\exp(-x)\},\quad \forall -\infty < x < \infty$	Gumbel
α^{-1}	1	α^{-1}	$=\begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}) & x > 0, \alpha > 0; \end{cases}$	Fréchet
α^{-1}	-1	$-\alpha^{-1}$	$=\begin{cases} \exp\left[-(-x)^{\alpha}\right] & x < 0, \alpha > 0 \\ 1 & x \ge 0 \end{cases}$	Reversed Weibull

وبفرض أن $X \sim G(\mu,\sigma,\zeta)$ و إذا كان $r > 0$ و $\zeta < 1/r$ فإن:

$$E\left(X^r\right) = \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} \left(\mu - \sigma/\zeta\right)^j \left(\sigma/\zeta\right)^{r-j} \Gamma\left(1-\zeta(r-j)\right)$$

وإذا كانت $\zeta \ge 1/r$ فإن $E\left(X^r\right) = \infty$.

و بالتالي فإن المتوسط (Mean) يعطى على الصورة:

$$E(X) = \mu - \frac{\sigma}{\zeta} + \frac{\sigma}{\zeta}\Gamma(1-\zeta), \quad 1/r \le \zeta < 1$$

و التباين (Variance):

$$\left(\frac{\sigma}{\zeta}\right)^2 \left(\Gamma(1-2\zeta) - \left[\Gamma(1-\zeta)\right]^2\right)$$

لمزيد من المعلومات راجع ((Heffernan and Tawn (2003)).

(1.3) الدراسات السابقة و المتعلقة بالموضوع تحت الدراسة Previous Studies

تعتبر الإحصاءات المرتبة المعممة (Generalized Order Statistics) أحد أهم فروع الإحصاء الرياضي الحديثة حيث تلعب دوراً هاماً ومتنامياً في العديد من فروع العلوم النظرية والتطبيقية كما أنها تُعتبر أداة ناجحة في بناء النماذج الرياضية (Mathematical Models) وتكمن أهمية الإحصاءات المرتبة المعممة في أنه نموذج رياضي مُعمم يضم بداخله جميع نماذج المتغيرات العشوائية المرتبة المعروفة حتى الآن ومنها على سبيل المثال لا الحصر

الإحصاءات المرتبة العادية والقيم المسجلة، ومن ثم فإن هذا النموذج يغطي حقلاً أوسع من التطبيقات.

ومنذ أن قدم الألماني Kamps في عام (1995 a,b) هذا النموذج المعمم أخذ هذا الفرع في التطور والنمو بشكل سريع من حيث عدد الأبحاث وكم النتائج ونوعية التطبيقات في هذا الاتجاه، وأصبح الآن هناك العديد من الاتجاهات لدراسة الإحصاءات المرتبة المعممة نذكر منها على سبيل المثال نظرية التوزيع، العزوم، نظرية النهايات، الإستدلال الإحصائي واستخدام الإحصاءات المرتبة المعممة في التنبؤ للمشاهدات المستقبلية سواء كان حجم العينة ثابتاً أو متغيراً عشوائياً وغيرها.

وقد تمكن الباحثان ((Kamps and Gather (1997) من تمييز التوزيع الأسي الخصائص التوزيعية للإحصاءات المرتبة المعممة، كما أن هذا التمييز يشمل النتائج المشهورة في حالة الإحصاءات المرتبة العادية و القيم المسجلة كحالات خاصة. كما حصل الباحث ((Ahsanullah (2000)) على الخصائص التوزيعية للإحصاءات المرتبة المعممة من التوزيع الأسي ذي المعلمتين. وكما تمكن الباحثان ((Kamps and Cramer (2001)) من الحصول على دالة كثافة الاحتمال ودالة التوزيع التراكمية لإحصاء مرتب معمم منفرد في الحالة العامة. كما حصلا على دالة كثافة الاحتمال المشروطة لإحصاء مرتب معمم منفرد في الحالة العامة. وقام الباحثون ((Cramer, Kamps and Rychlik (2002) بدراسة بعض الشروط الكافية لوجود عزوم للإحصاءات المرتبة المعممة، في حالة عدم وضع قيود على المعالم. و قام الباحث ((Cramer (2003) بدراسة نظرية التوزيع للإحصاءات المرتبة المتعاقبة و الإحصاءات المرتبة المعممة بالإضافة لبعض التطبيقا ت للعلاقات التكرارية و التمييز و نظرية الصلاحية ونظرية القيمة المتطرفة. واشتق الباحثان ((Saran and Pandey (2003) علاقات تكرارية لدوال توليد العزوم الهامشية و المشتركة للإحصاءات المرتبة المعممة من توزيع دالة القوى. كذلك حصل الباحثان ((Ahmad and Fawzy (2003) العلاقات التكرارية لعزوم الإحصاءات المرتبة المعممة لعائلة من التوزيعات المقطوعة من الطرفين . و قام الباحثان ((Athar and Islam (2004) باشتقاق علاقات تكرارية للعزوم المفردة و المختلطة للإحصاءات المرتبة المعممة للعائلة $F(x)=1-[ah(x)+b]^{c}$.

كذلك حصل الباحثون ((Al- Hussaini, Ahmad and Al- Kashif (2005) على علاقات تكرارية لدوال توليد العزوم و دوال توليد العزوم المشروطة للإحصاءات المرتبة المعممة لعائلة من التوزيعات المقطوعة من الطرفين، وتمييزها.و اشتق ((Al-Matrafi (2006) العزوم المضبوطة و العلاقات التكرارية لدالة توليد العزوم و دالة توليد العزوم المشروطة للإحصاءات المرتبة المعممة لبعض التوزيعات.

و قد حصل الباحثان ((Mahmoud and Al-Nagar(2007) على العلاقات التكرارية للعزوم المفردة و المختلطة للإحصاءات المرتبة المعممة من توزيع دالة القوى المعمم (Generalized Power Function Distribution) ، و تمييزها. كذلك تمكن الباحثان((Mahmoud and Al-Nagar(2009) من اشتقاق العلاقات التكرارية للعزوم المفردة و المختلطة للإحصاءات المرتبة المعممة من التوزيع الأسي الخطي (Linear Exponential Distribution)، بالإضافة لتمييز هذا التوزيع على أساس العزوم المشروطة للإحصاءات المرتبة المعممة.

من المعروف أن نموذج الإحصاءات المرتبة المعممة يكون فيه الترتيب غير تناقصي و قد قدم الباحثان ((Pawals and Szynal(2001) مفهوم الإحصاءات المرتبة المعممة السفلى (الدنيا) (Lower Generalized Order Statistics)، الذي يكون فيه ترتيب المتغيرات العشوائية غير تزايدي ، كما حصلا على العلاقات التكرارية للإحصاءات المرتبة المعممة السفلى من توزيع وايبل المعكوس (Inverse Weibull Distribution) ، و يرجع الفضل للباحثين ((Burkschat, Cramer and Kamps(2003)، في استخدام مصطلح الإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة (Dual Generalized Order Statistics)، و تمكن الباحثون من صياغة هذا المفهوم ودراسة خواصه والعلاقة بين هذا النموذج وبين نموذج الإحصاءات المرتبة المعممة. وقد قام الباحث ((Ahsanullah(2004) بإيجاد دالة الكثافة الهامشية للإحصاء المرتب المعمم المرافق الرائي $X_d(r,n,m,k)$. كما اشتق دالة التوزيع التراكمية الهامشية لهذا الإحصاء وكذلك قام الباحث ((Ahsanullah(2005) بتمييز توزيع دالة القوى عن طريق الإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة.كما قام الباحثان

(Mbah and Ahsanullah(2007) بدراسة العديد من الخصائص التوزيعية للإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة. و قد حصل الباحثون ((Athar, Anwar and Khan(2008)، على العلاقات التكرارية بين دالة التوقع للإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة المفردة و المشتركة للعائلة $F(x)=\left[ah(x)+b\right]^{c}$.

(1.4) وصف المشكلة **Description of the Problem**

الهدف من هذا البحث هو عمل حصر مركز لأهم النتائج التي تم الحصول عليها في موضوع الإحصاءات المرتبة المعممة مع إعادة صياغتها بلغة رياضية بسيطة تسمح للباحثين بالاستفادة منها. بالإضافة للحصول على نتائج جديدة في حالة الإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة.

سيحتوي الباب الثاني – إن شاء الله– على دراسة نظرية التوزيع والعزوم المفردة والعزوم المختلطة وكذلك بعض العلاقات التكرارية الهامة للإحصاءات المرتبة المعممة في الحالة الخاصة $m_1=...=m_{n-1}=m$، وكذلك إيجاد العزوم المفردة للإحصاءات المرتبة المعممة من توزيعات خاصة.

وسيحتوي الباب الثالث – بإذن الله– على دراسة الإحصاءات المرتبة المعممة في حالة أعم من الباب الثاني، حيث يتم استبدال الشرط $m_1=...=m_{n-1}=m$، بشرط أضعف وهو $\gamma_i \neq \gamma_j, \quad \forall i \neq j$.

وسيحتوي الباب الرابع – بحول الله– على دراسة الإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة والحصول على دالة الكثافة الهامشية و المشتركة، واستنتاج علاقات تكرارية لعزوم الإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة. بالإضافة للربط بين نموذجي الإحصاءات المرتبة المعممة و الإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة.

البَابُ الثَّانِي

الإحصاءات المرتبة المعممة

Generalized Order Statistics

الباب الثاني

الإحصاءات المرتبة المعممة

Generalized Order Statistics

مقدمة

يحتوي الجزء الأكبر من هذا الباب على حصر مركز لمعظم المفاهيم الأساسية و النتائج للإحصاءات المرتبة المعممة في الحالة الخاصة $m_1 = ... = m_{n-1} = m$. حيث تم دراسة نظرية التوزيع والعزوم المفردة والعزوم المختلطة وكذلك بعض العلاقات التكرارية الهامة. والجدير بالذكر هنا أن أكثر نتائج هذا الباب مقتبسة من بحث (Kamps(1995b.

و مع ذلك ، فإن هذا الباب يحتوي على بعض النتائج العامة، وذلك بإسقاط القيد $m_1 = ... = m_{n-1} = m$ أو استبداله بقيد أضعف منه. وكذلك إضافة براهين مهمة لنتائج أساسية بشيء من التفصيل.

يحتوي الفصل الأول من هذا الباب على تعريف الإحصاءات المرتبة المعممة المنتظمة و الإحصاءات المرتبة المعممة على أساس دالة توزيع اختيارية F ، وإيجاد دالة كثافة الاحتمال المشتركة للإحصاءات المرتبة المعممة على أساس دالة التوزيع F ، كذلك سوف نحصل على دالة كثافة الاحتمال ودالة التوزيع الهامشية للإحصاء المرتب المعمم الرائي $X(r,n,m,k)$ بالإضافة لدالة كثافة الاحتمال المشتركة لإحصاءين مرتبين معممين ودالة كثافة الاحتمال للمدى بين إحصاءين مرتبين معممين. ويشتمل الفصل الثاني على عزوم الإحصاءات المرتبة المعممة وفروق العزوم لإحصاءين مرتبين معممين متعاقبين وكذلك العلاقات التكرارية لدوال التوزيع والعزوم للإحصاءات المرتبة المعممة. ويحتوي الفصل الثالث على عزوم الإحصاءات المرتبة المعممة المأخوذة من توزيع دالة القوى وتوزيع باريتو وتوزيع وايبل، والتي نحصل منها على العزوم المفردة المناظرة للإحصاءات المرتبة العادية و القيم المسجلة العليا من الرتبة k كحالات خاصة.

(2.1) نظرية التوزيع للإحصاءات المرتبة المعممة

Distribution Theory of Generalized Order Statistics

تعتبر الإحصاءات المرتبة المعممة نموذجاً موحداً يحتوي عدة نماذج من المتغيرات العشوائية المرتبة، والتي ذكرنا بعضها في الباب الأول.

في هذا الفصل سوف نعرف الإحصاءات المرتبة المعممة من التوزيع المنتظم القياسي $U(0,1)$، والتي تُعرف بالإحصاءات المرتبة المعممة المنتظمة، كما سنعرف الإحصاءات المرتبة المعممة المعتمدة على دالة التوزيع التراكمية F، وذلك باستخدام التحويل المعتمد على الدالة العكسية F^{-1} (Pseudo Inverse Function)

نقطة البداية لتعريف الإحصاءات المرتبة المعممة المنتظمة هي دالة كثافة الاحتمال المشتركة على فراغ إقليدي مخروطي ذي البعد النوني.

تعريف (2.1) الإحصاءات المرتبة المعممة (Kamps(1995a,b))

نفرض أن

$$n \in N,\ n \ge 2,\ k \ge 1,\ \tilde{m} = (m_1, ..., m_{n-1}) \in R^n,\ M_r = \sum_{j=r}^{n-1} m_j, 1 \le r \le n-1$$

هي معالم (parameters) تحقق الشرط:

$$\gamma_r = k + n - r + M_r \ge 1\ , \forall r \in \{1,2,...,n-1\},$$

إذا كانت المتغيرات العشوائية $U(r,n,\tilde{m},k),\ \ r = 1,2,...,n$ لها دالة كثافة الاحتمال المشتركة على الصورة:

$$f^{U(1,n,\tilde{m},k),...,U(n,n,\tilde{m},k)}(u_1,...,u_n) = k\left(\prod_{j=1}^{n-1} \gamma_j\right)\left(\prod_{i=1}^{n-1} (1-u_i)^{m_i}\right)(1-u_n)^{k-1} \quad (2.1)$$

داخل المخروط $0 \le u_1 \le ... \le u_n < 1$ في الفراغ R^n فإن هذه المتغيرات العشوائية تعرف بالإحصاءات المرتبة المعممة المنتظمة.

لنفرض أن F دالة توزيع تراكمية، فإن المتغيرات العشوائية

$$X(r,n,\tilde{m},k) = F^{-1}(U(r,n,\tilde{m},k)\ ,\ r = 1,2,...,n \quad (2.2)$$

تعرف بالإحصاءات المرتبة المعممة على أساس دالة التوزيع F، والتي يرمز لها اختصاراً بالرمز .gos`s

في الحالة الخاصة $m_1 = ... = m_{n-1} = m$ سوف نستخدم الرموز $X(r,n,\tilde{m},k), U(r,n,\tilde{m},k)$ بدلاً من $X(r,n,m,k), U(r,n,m,k)$ على الترتيب.

ملاحظة (2.1)

إذا كانت دالة التوزيع F دالة مطلقة الاتصال (راجع الملحق)، ولها دالة كثافة الاحتمالية f ، فإنه باستخدام المتباينة $F\left(F^{-1}(x)\right) \le x$ يمكن ملاحظة أن:

$$P(X(1,n,\tilde{m},k) \le x_1,..., X(n,n,\tilde{m},k) \le x_n))$$
$$= P(U(1,n,\tilde{m},k) \le F(x_1),...,U(n,n,\tilde{m},k) \le F(x_n))$$

وعلى ذلك فإن دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للإحصاءات المرتبة المعممة $X(1,n,\tilde{m},k),..., X(n,n,\tilde{m},k)$ تعطى بالعلاقة:

$$f^{X(1,n,\tilde{m},k),...,X(n,n,\tilde{m},k)}(x_1,...,x_n)$$
$$= k\left(\prod_{j=1}^{n-1} \gamma_j\right)\left(\prod_{i=1}^{n-1} (\bar{F}(x_i))^{m_i} f(x_i)\right)(\bar{F}(x_n))^{k-1} f(x_n), \quad (2.3)$$

داخل المخروط $F(0+) \le x_1 \le ... \le x_n < F(1-)$.

يحتوي نموذج الإحصاءات المرتبة المعممة على العديد من نماذج المتغيرات العشوائية المرتبة، وباختيار مناسب للمعالم $(\tilde{m},k)$ نحصل على تلك النماذج كحالات خاصة كما يتضح من الجدول التالي:

جدول (2-1) النماذج المختلفة للإحصاءات المرتبة

m_r	k	γ_r	النموذج	الإحصاءات المرتبة
0	1	$n-r+1$	Ordinary Order Statistics	الإحصاءات المرتبة العادية
$(n-r+1)\alpha_r$ $-(n-r)\alpha_{r+1}-1$	α_n	$(n-r+1)\alpha_r$	Sequential OS`s	الإحصاءات المرتبة المتعاقبة
0	$\alpha-n+1$	$\alpha-r+1$	OS`s with non-integer sample size	الإحصاءات المرتبة بحجم عينة بعدد غير صحيح
-1	$k\in N$	k	k^{th} record values	القيم المسجلة من الرتبة k
$\beta_r-\beta_{r+1}-1$	β_n	β_r	Pfeifer`s record values	القيم المسجلة لـــPfeifer
$\beta_r k_r-\beta_{r+1}k_{r+1}-1$	$\beta_n k_n$	$\beta_r k_r$	k_n - records	القيم المسجلة من النوع k_n
$R_r\in N_0$	R_n+1	$N-r+1-\sum_{j=1}^{r-1}R_j$ $=n-r+1+\sum_{j=1}^{n}R_j$	Progressively type II censored order statistics	الإحصاءات المرتبة التتابعية المراقبة من النوع الثاني

ملاحظة (2.2)

بفرض أن $G(t;\alpha)=1-(\bar{F}(t))^{\alpha}$، فإنه يمكننا تمثيل الإحصاءات المرتبة المعممة على أسا س دالة التوزيع F على أنها الإحصاءات المرتبة المتعاقبة حيث $F_r(t)=G(t,\gamma_r/n-r+1)$، أو على أنها تسجيلات Pfeifer حيث $F_r(t)=G(t,\gamma_r),\gamma_n=k$، أو على أنها التسجيلات من النوع k_n من توزيعات غير متطابقة (k_n – record from non- identical distributions) حيث $F_r(t)=G(t,\gamma_r/k_r)$.

الآن سوف نعرف بعض الرموز التي سوف نستخدمها من الآن فصاعداً:

(i) لنفرض أن $c_{r-1}=\prod_{j=1}^{r}\gamma_j,\ r=1,\ldots,n$

مع ملاحظة $\gamma_n=k,\ M_n=0$ فإن c_{n-1} يكون الثابت الذي يظهر في دالة الكثافة المشتركة للإحصاءات المرتبة المعممة المنتظمة في العلاقة(2.1).

(ii) سوف نُعرف الدوال h_m و g_m حيث $m\in R$ كما يلي:

$$h_m(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{m+1}(1-x)^{m+1}, & m\neq -1\\[2ex] -\ln(1-x), & m=-1\end{cases}\quad ,x\in[0,1)$$

$$\begin{aligned}g(x)&=h_m(x)-h_m(0)\\ &=\begin{cases}\dfrac{1}{m+1}\left(1-(1-x)^{m+1}\right), & m\neq -1\\[2ex] -\ln(1-x), & m=-1\end{cases}\quad ,x\in[0,1)\end{aligned}$$

انطلاقاً من دالة كثافة الاحتمال المشتركة للإحصاءات المرتبة المعممة المنتظمة فإنه يمكن الحصول على دالة الكثافة المشتركة لأول r من الإحصاءات المرتبة المعممة المنتظمة، ودالة

الكثافة الهامشية للإحصاء المرتب المعمم المنتظم $U(r,n,\tilde{m},k)$ ودالة الكثافة المشتركة للإحصاءين المرتبين المعممين المنتظمين $U(r,n,\tilde{m},k),U(s,n,\tilde{m},k)$.

نظرية (2.1) (Kamps 1995 a,b)

دالة كثافة الاحتمال المشتركة لأول r من الإحصاءات المرتبة المعممة المنتظمة $U(1,n,\tilde{m},k),...,U(r,n,\tilde{m},k),\ r\in\{1,...,n\},$ ، تعطى بالعلاقة

$$f^{U(1,n,\tilde{m},k),...,U(r,n,\tilde{m},k)}(u_1,...,u_r)=c_{r-1}\left(\prod_{i=1}^{r-1}(1-u_i)^{m_i}\right)(1-u_r)^{\gamma_r-1},$$

$$0\le u_1,...,\le u_r<1 \qquad (2.4)$$

البرهان

سوف نثبت النظرية باستخدام مبدأ الاستنتاج الرياضي على r مبتدئين بـــ $r=n-1$

$$f^{U(1,n,\tilde{m},k),...,U(n-1,n,\tilde{m},k)}(u_1,...,u_{n-1})=\int_{u_{n-1}}^{1}f^{U(1,n,\tilde{m},k),...,U(n,n,\tilde{m},k)}(u_1,...,u_n)du_n$$

$$=\prod_{j=1}^{n}\gamma_j\int_{u_{n-1}}^{1}\prod_{j=1}^{n-1}\left(1-u_j\right)^{m_j}\left(1-u_n\right)^{\gamma_n-1}du_n$$

$$=-\prod_{j=1}^{n-1}\gamma_j\left(1-u_j\right)^{m_j}\left(1-u_n\right)^{\gamma_n}\Big|_{u_{n-1}}^{1}$$

$$=c_{n-2}\prod_{j=1}^{n-2}\left(1-u_j\right)^{m_j}\left(1-u_{n-1}\right)^{\gamma_n+m_{n-1}}$$

$$=c_{n-2}\prod_{j=1}^{n-2}\left(1-u_j\right)^{m_j}\left(1-u_{n-1}\right)^{\gamma_{n-1}-1}$$

نحصل على العلاقة بإتباع ما يأتي:

من العلاقة(2.1)

$$f^{U(1,n,\tilde{m},k),...,U(r,n,\tilde{m},k)}(u_1,...,u_r)$$

$$=\int_{u_r}^{1}\cdots\int_{u_{n-1}}^{1}f^{U(1,n,\tilde{m},k),...,U(n,n,\tilde{m},k)}(u_1,...,u_n)du_n...du_{r+1}$$

$$f^{U(1,n,\tilde{m},k),\ldots,U(r,n,\tilde{m},k)}(u_1,\ldots,u_r)$$

$$=\prod_{j=1}^{n}\gamma_j\int_{u_r}^{1}\ldots\int_{u_{n-1}}^{1}[(1-u_1)^{m_1}\ldots(1-u_{r-1})^{m_{r-1}}(1-u_r)^{m_r}$$

$$\times(1-u_{r+1})^{m_{r+1}}\ldots(1-u_{n-1})^{m_{n-1}}](1-u_n)^{\gamma_n-1}du_n\ldots du_{r+1}$$

$$f^{U(1,n,\tilde{m},k),\ldots,U(r,n,\tilde{m},k)}(u_1,\ldots,u_r)=$$

$$=\prod_{j=1}^{n}\gamma_j\prod_{i=1}^{r-1}(1-u_i)^{m_i}\int_{u_r}^{1}\ldots\int_{u_{n-2}}^{1}(1-u_r)^{m_r}(1-u_{r+1})^{m_{r+1}}$$

$$\ldots\times(1-u_{n-1})^{m_{n-1}}\left(\frac{-(1-u_n)^{\gamma_n}}{\gamma_n}\Bigg|_{u_{n-1}}^{1}\right)du_{n-1}\ldots du_{r+1}$$

$$=\prod_{i=1}^{r-1}(1-u_i)^{m_i}\prod_{j=1}^{n-1}\gamma_j\int_{u_r}^{1}\ldots\int_{u_{n-2}}^{1}(1-u_r)^{m_r}$$

$$\times(1-u_{r+1})^{m_{r+1}}\ldots(1-u_{n-1})^{m_{n-1}+\gamma_n}du_{n-1}\ldots du_{r+1}$$

$$=\prod_{i=1}^{r-1}(1-u_i)^{m_i}\prod_{j=1}^{n-1}\gamma_j\int_{u_r}^{1}\ldots\int_{u_{n-2}}^{1}(1-u_r)^{m_r}$$

$$\times(1-u_{r+1})^{m_{r+1}}\ldots(1-u_{n-1})^{\gamma_{n-1}-1}du_{n-1}\ldots du_{r+1}$$

حيث أن:

$$m_i=\gamma_i-\gamma_{i+1}-1$$

وبإجراء التكامل المتكرر نصل إلى:

$$f^{U(1,n,\tilde{m},k),\ldots,U(r,n,\tilde{m},k)}(u_1,\ldots,u_r)$$

$$=\prod_{i=1}^{r-1}(1-u_i)^{m_i}\prod_{j=1}^{r+1}\gamma_j(1-u_r)^{m_r}\int_{u_r}^{1}(1-u_{r+1})^{m_r+\gamma_{r+2}}du_{r+1}$$

$$=\prod_{i=1}^{r-1}(1-u_i)^{m_i}\prod_{j=1}^{r+1}\gamma_j(1-u_r)^{m_r}\int_{u_r}^{1}(1-u_{r+1})^{\gamma_{r+1}-1}du_{r+1}$$

$$=\prod_{i=1}^{r-1}(1-u_i)^{m_i}\prod_{j=1}^{r}\gamma_j\gamma_{r+1}(1-u_r)^{m_r}\frac{(1-u_{r+1})^{\gamma_{r+1}}}{\gamma_{r+1}}\Bigg|_{1}^{u_r}$$

$$f^{U(1,n,\tilde{m},k),\dots,U(r,n,\tilde{m},k)}(u_1,\dots,u_r)$$
$$=c_{r-1}\prod_{i=1}^{r-1}(1-u_i)^{m_i}(1-u_r)^{m_r+\gamma_{r+1}}$$
$$=c_{r-1}\prod_{i=1}^{r-1}(1-u_i)^{m_i}(1-u_r)^{\gamma_r-1}$$

□

من نظرية (2.1) نحصل مباشرة على خاصية ماركوف للإحصاءات المرتبة المعممة، وهي خاصية مشهورة في الإحصاءات المرتبة العادية والقيم المسجلة.

تمهيدية (2.1) (Kamps 1995 a,b)

على أساس دالة توزيع تراكمية مطلقة الاتصال F ، فإن الإحصاءات المرتبة المعممة $X(r,n,\tilde{m},k), r=2,\dots,n,$ تكون سلسلة ماركوف (Markov chain) باحتمالات الانتقال (transition probabilities) التالية:

$$P\left(X(r,n,\tilde{m},k)>t \middle| X(r-1,n,\tilde{m},k)=s\right)=\left(\frac{\overline{F}(t)}{\overline{F}(s)}\right)^{\gamma_r},t\geq s,F(s)<1.$$

تمهيدية (2.2) (Kamps 1995 a,b)

إذا كانت r,j أعداداً صحيحة موجبة تحقق $r>j$ فإن:

$$A_j=\int_{u_{r-j-1}}^{u_r}\dots\int_{u_{r-2}}^{u_r}\prod_{i=1}^{r-1}h'_m(u_i)du_{r-1}\dots du_{r-j}$$
$$=\frac{1}{j!}\prod_{i=1}^{r-j-1}h'_m(u_i)\left[h_m(u_r)-h_m(u_{r-j-1})\right]^j, \quad j=1,2,\dots,r-1 \qquad (2.5)$$

البرهان

$$A_j=\int_{u_{r-j-1}}^{u_r}\dots\int_{u_{r-2}}^{u_r}\prod_{i=1}^{r-1}h'_m(u_i)du_{r-1}\dots du_{r-j}$$
$$=\int_{u_{r-j-1}}^{u_r}\dots\int_{u_{r-2}}^{u_r}\prod_{i=1}^{r-2}h'_m(u_i)\cdot h'_m(u_{r-1})du_{r-1}\dots du_{r-j}$$

$$A_j = \int_{u_{r-j-1}}^{u_r} \dots \int_{u_{r-3}}^{u_r} \prod_{i=1}^{r-2} h'_m(u_i) \cdot h_m(u_{r-1}) \Big|_{u_{r-2}}^{u_r} du_{r-2} \dots du_{r-j}$$

$$= \int_{u_{r-j-1}}^{u_r} \dots \int_{u_{r-3}}^{u_r} \prod_{i=1}^{r-3} h'_m(u_i) \cdot h'_m(u_{r-2}) \left[h_m(u_r) - h_m(u_{r-2}) \right] du_{r-2} \dots du_{r-j}$$

$$= \frac{-1}{2!} \int_{u_{r-j-1}}^{u_r} \dots \int_{u_{r-4}}^{u_r} \prod_{i=1}^{r-3} h'_m(u_i) \cdot \left[h_m(u_r) - h_m(u_{r-2}) \right]^2 \Big|_{u_{r-3}}^{u_r} du_{r-3} \dots du_{r-j}$$

$$= \frac{1}{2!} \int_{u_{r-j-1}}^{u_r} \dots \int_{u_{r-4}}^{u_r} \prod_{i=1}^{r-4} h'_m(u_i) \cdot \left(h'_m(u_{r-3}) \right) \left[h_m(u_r) - h_m(u_{r-3}) \right]^2 du_{r-3} \dots du_{r-j}$$

$$= -\frac{1}{3!} \int_{u_{r-j-1}}^{u_r} \dots \int_{u_{r-5}}^{u_r} \prod_{i=1}^{r-4} h'_m(u_i) \cdot \left[h_m(u_r) - h_m(u_{r-4}) \right]^3 du_{r-4} \dots du_{r-j}$$

وبتكرار إجراء التكامل نحصل على

$$A_j = \frac{1}{(j-1)!} \int_{u_{r-j-1}}^{u_r} \prod_{i=1}^{r-j-1} h'_m(u_i) \cdot \left[-h'_m(u_{r-j}) \right] \left[h_m(u_r) - h_m(u_{r-j}) \right]^{j-1} du_{r-j}$$

$$= \frac{1}{(j)!} \prod_{i=1}^{r-j-1} h'_m(u_i) \left[h_m(u_r) - h_m(u_{r-j-1}) \right]^j, \quad j = 1,2,\dots,r-1$$

للحصول على دالة الكثافة ودالة التوزيع الهامشية في بعد واحد، سيكون اختيار المتجه $\tilde{m}$ مقيد، حيث يمكن الحصول على نتائج سهلة ومفيدة بالنسبة للإحصاء المرتب المعمم $X(r,n,\tilde{m},k)$ ، تحت الشرط $m_1 = \dots = m_{r-1} = m$.

نظرية (2.2) (Kamps 1995 a,b)

دالة الكثافة الهامشية للإحصاء المرتب المعمم المنتظم $U(r,n,\tilde{m},k),\ r \in \{1,\dots,n\}$، حيث $m_1 = \dots m_{n-1} = m$ تعطى بالعلاقة:

$$f^{U(r,n,m,k)}(u) = \frac{c_{r-1}}{(r-1)!} (1-u)^{\gamma_r - 1} g_m^{r-1}(u) \qquad (2.6)$$

البرهان

بفرض أن $r \geq 2$

يمكن وضع العلاقة (2.4) على الصورة

$$f^{U(1,n,\tilde{m},k),\ldots,U(r,n,\tilde{m},k)}(u_1,\ldots,u_r)=c_{r-1}\left(\prod_{i=1}^{r-1}\frac{dh_m(u_i)}{du_i}\right)(1-u_r)^{\gamma_r-1}$$

حيث h_m تعرف كما في ملاحظة (2.2). و من العلاقة (2.5)

بوضع $j=r-1,\ u_0=0$ نحصل على

$$A_j=A_{r-1}=\int_0^{u_r}\ldots\int_{u_{r-2}}^{u_r}\prod_{i=1}^{r-1}h'_m(u_i)du_{r-1}\ldots du_1$$

$$=\frac{1}{(r-1)!}\left[h_m(u_r)-h_m(0)\right]^{r-1}$$

$$=\frac{1}{(r-1)!}g_m^{r-1}(u_r)$$

وباستخدام العلاقة (2.4) نحصل على

$$f^{U(r,n,m,k)}(u_r)=\int_0^{u_r}\ldots\int_{u_{r-2}}^{u_r}f^{U(1,n,m,k),\ldots,U(r,n,m,k)}(u_{1,\ldots,}u_r)du_{r-1}\ldots du_1$$

$$=c_{r-1}(1-u_r)^{\gamma_r-1}\int_0^{u_r}\ldots\int_{u_{r-2}}^{u_r}\prod_{i=1}^{r-1}h'_m(u_i)du_{r-1}\ldots du_1$$

$$=c_{r-1}(1-u_r)^{\gamma_r-1}\cdot A_{r-1}$$

$$f^{U(r,n,m,k)}(u)=\frac{c_{r-1}}{(r-1)!}(1-u)^{\gamma_r-1}g_m^{r-1}(u)$$

□

وباستخدام العلاقة (2.2) نحصل على دالة الكثافة الهامشية للإحصاء المرتب المعمم $X(r,n,m,k)$ على أساس دالة التوزيع F على الصورة:

$$f^{X(r,n,m,k)}(x)=\frac{c_{r-1}}{(r-1)!}\left(\overline{F}(x)\right)^{\gamma_r-1}f(x)g_m^{r-1}(F(x)),\ -\infty<x<\infty \quad (2.7)$$

جدول (2-2) دالة الكثافة الهامشية لبعض نماذج الإحصاءات المرتبة

نماذج الإحصاءات المرتبة	$f^{X(r;n,\tilde{m},k)}(x)=\frac{C_{r-1}}{(r-1)!}\left(\bar{F}(x)\right)^{\gamma_r-1}f(x)g_m^{r-1}(F(x))$
الإحصاءات المرتبة العادية Ordinary Order Statistics	$=r\binom{n}{r}F^{r-1}(x)\left(\bar{F}(x)\right)^{n-r}f(x)$
الإحصاءات المرتبة المتعاقبة Sequential OS`s	$=r\binom{n}{r}\left(\prod_{j=1}^{r}\alpha_j\right)\left(\bar{F}(x)\right)^{\alpha_r(n-r+1)-1}f(x)g_m^{r-1}(F(x))$
الإحصاءات المرتبة بحجم عينة بعدد غير صحيح OS`s with non-integr sample size	$=r\binom{\alpha}{r}F^{r-1}(x)\left(\bar{F}(x)\right)^{\alpha-r}f(x)$
القيم المسجلة من النوع k k^{th}record values	$=\frac{k^r}{(r-1)!}\left(-\ln\left(\bar{F}(x)\right)\right)^{r-1}\left(\bar{F}(x)\right)^{k-1}f(x)$
القيم المسجلة لـــPfeifer Pfeifer`s record values	$=\frac{1}{(r-1)!}\left(\prod_{j=1}^{r}\beta_j\right)\left(\bar{F}(x)\right)^{\beta_r-1}f(x)g_m^{r-1}(F(x))$

نظرية (2.3) (Kamps 1995 a,b)

دالة الكثافة المشتركة للإحصاءين المرتبين المعممين المنتظمين $U(r,n,\tilde{m},k)$ و $U(s,n,\tilde{m},k)$ ، و $m_1=\ldots m_{r-1}=\mu$ ، و $m_{r+1}=\ldots=m_{s-1}=\nu$ حيث $1\le r<s\le n$ تعطى بالعلاقة:

$$f^{U(r,n,\tilde{m},k),U(s,n,\tilde{m},k)}(u_r,u_s)=\frac{c_{s-1}}{(r-1)!(s-r-1)!}(1-u_r)^{m_r}g_{\mu}^{r-1}(u_r)$$

$$\times\left(h_\nu(u_s)-h_\nu(u_r)\right)^{s-r-1}(1-u_s)^{\gamma_s-1},\qquad 0<u_r<u_s<1 \quad (2.8)$$

البرهان

بطريقة مماثلة لبرهان نظرية (2.2) .

نفرض أن $s-r\geq 2$

نقطة البداية هي دالة الكثافة المشتركة لأول s من الإحصاءات المرتبة المعممة المنتظمة.

$$f^{U(r,n,\tilde{m},k),U(s,n,\tilde{m},k)}(u_r,u_s)=\int_0^{u_r}\ldots\int_{u_{r-2}}^{u_r}\cdot\int_{u_r}^{u_s}\ldots\int_{u_{s-2}}^{u_s}f^{U(1,n,\tilde{m},k),\ldots,U(s,n,\tilde{m},k)}(u_1,\ldots,u_s)$$

$$\times du_{s-1}\ldots du_{r+1}du_{r-1}\ldots du_1$$

$$=c_{s-1}(1-u_r)^{m_r}(1-u_s)^{\gamma_s-1}\int_{u_r}^{u_s}\ldots\int_{u_{s-2}}^{u_s}\left(\prod_{i=r+1}^{s-1}h'_v(u_i)\right)du_{s-1}\ldots du_{r+1}$$

$$\times\int_0^{u_r}\ldots\int_{u_{r-2}}^{u_r}\cdot\left(\prod_{i=1}^{r-1}h'_\mu(u_i)\right)du_{r-1}\ldots du_1$$

$$=c_{s-1}(1-u_r)^{m_r}(1-u_s)^{\gamma_s-1}\int_{u_r}^{u_s}\ldots\int_{u_{s-3}}^{u_s}\left(\prod_{i=r+1}^{s-2}h'_v(u_i)\right)$$

$$\times\left(h_v(u_s)-h_v(u_{s-2})\right)du_{s-2}\ldots du_{r+1}\cdot A_{r-1}$$

حيث أن

$$A_{r-1}=\int_0^{u_r}\ldots\int_{u_{r-2}}^{u_r}\cdot\left(\prod_{i=1}^{r-1}h'_\mu(u_i)\right)du_{r-1}\ldots du_1$$

$$f^{U(r,n,\tilde{m},k),U(s,n,\tilde{m},k)}(u_r,u_s)=c_{s-1}(1-u_r)^{m_r}(1-u_s)^{\gamma_s-1}\int_{u_r}^{u_s}\frac{-1}{(s-r-2)!}$$

$$\times h'_v(u_{r+1})\left(h_v(u_s)-h_v(u_{r+1})\right)^{s-r-2}du_{r+1}\cdot A_{r-1}$$

$$=\frac{c_{s-1}}{(s-r-1)!}(1-u_r)^{m_r}(1-u_s)^{\gamma_s-1}\left[h_v(u_s)-h_v(u_r)\right]^{s-r-1}\cdot A_{r-1}$$

و باستخدام تمهيدية (2.2) و التعويض عن A_{r-1} نحصل على المطلوب.

□

وباستخدام العلاقة (2.2) نحصل على دالة الكثافة المشتركة للإحصاءين المرتبين المعممين $X(s,n,\tilde{m},k),X(r,n,\tilde{m},k)$ ، $r<s$ ، على أساس دالة التوزيع F على الصورة:

$$f^{X(r,n,\tilde{m},k),X(s,n,\tilde{m},k)}(x_r,x_s)=\frac{C_{s-1}}{(r-1)!(s-r-1)!}\left(\bar{F}(x_r)\right)^{m_r}\,g_{\mu}^{r-1}\left(F(x_r)\right)$$

$$\times\left(h_v(F(x_s))-h_v(F(x_r))\right)^{s-r-1}\left(\bar{F}(x_s)\right)^{\gamma_s-1}f(x_r)f(x_s),\quad x_r<x_s,\quad (2.9)$$

وعندما $m_1=\ldots=m_{s-1}=m$ فإن دالة الكثافة المشتركة للإحصاءين المرتبين المعممين $X(s,n,m,k),X(r,n,m,k)$ تعطى على الصورة:

$$f^{X(r,n,m,k),X(s,n,m,k)}(x_r,x_s)=\frac{C_{s-1}}{(r-1)!(s-r-1)!}\left(\bar{F}(x_r)\right)^{m}\,g_{m}^{r-1}\left(F(x_r)\right)$$

$$\times\left(h_m(F(x_s))-h_m(F(x_r))\right)^{s-r-1}\left(\bar{F}(x_s)\right)^{\gamma_s-1}f(x_r)f(x_s),\quad x_r<x_s,\quad (2.10)$$

وكذلك بتطبيق نظرية (2.3) تعطى دالة الكثافة للمدى بين أي إحصاءين مرتبين معممين $r<s$ ، $X(s,n,\tilde{m},k),X(r,n,\tilde{m},k)$.

نظرية (2.4) (Kamps 1995 a,b)

إذا كان:

$$W_{r,s}=X(s,n,\tilde{m},k)-X(r,n,\tilde{m},k)$$

فإن دالة كثافة الاحتمال للمدى بين إحصاءين مرتبين معممين تعطى على الصورة:

$$f^{W_{r,s}}(w)=\frac{c_{s-1}}{(r-1)!(s-r-1)!}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\bar{F}(x_r)\right)^{m_r}f(x_r)g_{\mu}^{r-1}\left(F(x_r)\right)$$

$$\times\left(h_v(F(w+x_r))-h_v(F(x_r))\right)^{s-r-1}\left(\bar{F}(w+x_r)\right)^{\gamma_s-1}f(w+x_r)dx_r$$

حيث $w=x_s-x_r$

البرهان:

مباشرة من دالة الكثافة المشتركة لإحصاءين مرتبين معممين، و باستخدام التعويض

$$w=x_s-x_r$$

فإن:

$$f^{W_{r,s},X(r,n,\tilde{m},k)}(w,x_r)=\frac{c_{s-1}}{(r-1)!(s-r-1)!}\left(\bar{F}(x_r)\right)^{m_r}f(x_r)g_{\mu}^{r-1}\left(F(x_r)\right)$$

$$\times\left[h_v\left(F(w+x_r)-h_v(F(x_r))\right]^{s-r-1}\left(\bar{F}(w+x_r)\right)^{\gamma_s-1}f(w+x_r)$$

$$,\ x_r<s$$

وعليه

$$f^{W_{r,s}}(w)=\frac{c_{s-1}}{(r-1)!(s-r-1)!}\int_{-\infty}^{\infty}(1-F(x_r))^{m_r}\, f(x_r)g_{\mu}^{r-1}(F(x_r))$$
$$\times\left[h_v(F(w+x_r)-h_v(F(x_r))\right]^{s-r-1}(1-F(w+x_r))^{\gamma_s-1} f(w+x_r)dx_r$$

ويمكن وضع دالة الكثافة الهامشية للإحصاء المرتب المعمم $X(r,n,\tilde{m},k)$ على الصورة

$$f^{X(r,n,\tilde{m},k)}(x)=f^{U(r,n,\tilde{m},k)}(F(x))f(x) \qquad (2.11)$$

وتلعب العلاقة (2.11) دوراً هاماً في الدراسات حول الإحصاءات المرتبة المعممة.

والآن سنذكر بعض الملاحظات و بعض الخصائص.

ملاحظة (2.3)

إذا كان $m_1=m_2=...=m_{r-1}=m$ ، فإننا سوف نرمز لدالة الكثافة الهامشية للإحصاء المرتب الرائي المنتظم بالرمز

$$\varphi_{r,n}(x)=f^{U(r,n,m,k)}(x)=\frac{c_{r-1}}{(r-1)!}(1-x)^{\gamma_r-1}g_m^{r-1}(x), \quad x\in(0,1)$$
$$1\le r\le n, \qquad (2.12)$$

فيما يلي سوف نعرض بعض العلاقات التكرارية لدوال الكثافة و التوزيع الهامشية للإحصاءات المرتبة المعممة

تمهيدية (2.2) (Kamps 1995 a,b)

إذا كان $m_1=m_2=...=m_{r-1}=m$ ، فإن العلاقات التكرارية التالية لدوال الكثافة في (2.12) تكون صحيحة:

$$(i) \quad \gamma_{r+1}\varphi_{r,n}(x)+r(m+1)\varphi_{r+1,n}(x)=\gamma_1\varphi_{r,n-1}(x),$$

$$(ii) \quad \gamma_{r+1}[\varphi_{r+1,n}(x)-\varphi_{r,n}(x)]=\gamma_1[\varphi_{r+1,n}(x)-\varphi_{r,n-1}(x)], \qquad (2.13)$$

$$(iii) \quad \gamma_1[\varphi_{r,n}(x)-\varphi_{r,n-1}(x)]=r(m+1)[\varphi_{r,n}(x)-\varphi_{r+1,n}(x)]$$

في حالة القيم المسجلة $(m=-1)$ ، تكون العلاقات (2.13) واضحة وبديهية. لكن عندما $(m\neq-1)$ ، التمهيدية (2.2)، تكون تعميماً للمتطابقات المشهورة لدوال الكثافة للإحصاءات المرتبة العادية لدالة بيتا غير التامة (the incomplete beta-function).راجع (David and Nagaraja2003) صفحة 44 و45.

الآن نعرض دالة التوزيع التراكمية الهامشي ة $\Phi_{r,n}$ للإحصاء المرتب المعمم المنتظم $U(r,n,\tilde{m},k)$، ودالة التوزيع $F^{X(r,n,\tilde{m},k)}$ للإحصاء المرتب المعمم الرائي $X(r,n,\tilde{m},k)$ على أساس دالة التوزيع التراكمية F، حيث $r \in \{1,\dots,n\}$.

تمهيدية (2.3) (Kamps 1995 a,b)

إذا كان $m_1 = m_2 = \dots = m_{r-1} = m$، و $r \in \{1,\dots,n\}$، فإن:

$$\Phi_{r,n}(x) = 1 - c_{r-1}(1-x)^{\gamma_r} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!c_{r-j-1}} g_m^j(x), \quad x \in (0,1),$$

$$F^{X(r,n,m,k)}(x) = \Phi_{r,n}(F(x)) \qquad (2.14)$$

حيث أن

$$f^{X(r,n,m,k)}(x) = \varphi_{r,n}(F(x))f(x),$$

$$\Phi_{r,n}(x) = \int_0^x \varphi_{r,n}(t)dt$$

فإن العلاقات التكرارية في (2.13) تكون أيضاً صحيحة لدوال الكثافة و دوال التوزيع و العزوم للإحصاءات المرتبة المعممة.

باستخدام العلاقة (2.14) يمكننا الحصول على الفرق $\Phi_{r,n}(x) - \Phi_{r-1,n}(x)$، والذي له ارتباط هام بعلاقات العزوم للإحصاءات المرتبة المعممة كما سنرى في الفصل القادم.

بديهية (2.1) (Kamps 1995 a,b)

لنفرض أن $\Phi_{r,n}(x), \Phi_{r-1,n}(x)$، حيث $m_1 = m_2 = \dots = m_{r-1} = m$، فإنه لأي $r \geq 2$

$$\Phi_{r,n}(x) - \Phi_{r-1,n}(x) = -\frac{c_{r-2}}{(r-1)!}(1-x)^{\gamma_r} g_m^{r-1}(x), \; x \in (0,1) \qquad (2.15)$$

البرهان:

يمكن برهنة البديهية السابقة، إما بالحساب المباشر أو باستخدام التكامل بالتجزئ، مع ملاحظة أن $g_m(0) = 0$.

$$\Phi_{r,n}(x)=\int_0^x \varphi_{r,n}(t)dt$$
$$=\int_0^x \frac{c_{r-1}}{(r-1)!}(1-t)^{\gamma_r-1}g_m^{r-1}(t)dt$$

و بفرض أن $u=g_m^{r-1}(t)$ و $dv=(1-t)^{\gamma_r-1}dt$ ، واستخدام التكامل بالتجزئ نحصل على

$$\Phi_{r,n}(x)=-\frac{c_{r-1}}{\gamma_r(r-1)!}(1-t)^{\gamma_r}g_m^{r-1}(t)\Big|_0^x+\frac{c_{r-1}}{(r-1)!}\int_0^x (r-1)(1-t)^{\gamma_r}$$
$$\times g_m^{r-2}(t)g'_m(t)dt$$

لكن $g'_m(t)=(1-t)^m$ و $m=\gamma_{r-1}-\gamma_r-1$

وعليه فإن

$$\Phi_{r,n}(x)=-\frac{c_{r-2}}{(r-1)!}(1-x)^{\gamma_r}g_m^{r-1}(x)+\frac{c_{r-2}}{(r-2)!}\int_0^x ((1-t)^{\gamma_{r-1}-1}$$
$$\times g_m^{r-2}(t)dt$$
$$=-\frac{c_{r-2}}{(r-1)!}(1-x)^{\gamma_r}g_m^{r-1}(x)+\Phi_{r-1,n}(x)$$

و بنقل $\Phi_{r-1,n}(x)$ للطرف الآخر يتحقق المطلوب

□

باستخدام الفقرتين $(ii),(i)$ من العلاقة (2.12) يمكن الحصول على تمثيل الفرق

$\Phi_{r,n}(x)-\Phi_{r-1,n-1}(x)$ و $\Phi_{r-1,n}(x)-\Phi_{r-1,n-1}(x)$

حيث $m_1=m_2=...=m_{r-1}=m$

من المعلوم أنه استناداً على دالة التوزيع الأسي القياسي ،فإن الفراغ (الفضاء) الطبيعي (normalized spacings) للإحصاءات المرتبة العادية، هو

$$Y_i=(n-i+1)[X_{i,n}-X_{i-1,n}],\ \ i=1,2,...,n$$

حيث $X_{0,n}=0$ ، تكون مستقلة (stochastically independent)، و تتبع التوزيع الأسي القياسي.وتوجد نتائج مهمة راجع David(1981)، صفحة (20و21).

كما أثبت (Rohatgi and Saleh (1988)) الخاصية نفسها في حالة الإحصاءات المرتبة من عينة حجمها عدد غير صحيح. وكذلك أثبت Resnick(1973) هذه الخاصية في حالة القيم المسجلة حيث أن

$$Z_1 = X_{L(1)},\ Z_i = X_{L(i)} - X_{L(i-1)},\ i \in N \geq 2$$

تكون مستقلة إحصائياً و تتبع التوزيع الأسي القياسي.

وهكذا، فإنه يمكن التعبير عن الإحصاء المرتب $X_{r,n}$ كمجموع من المتغيرات العشوائية المستقلة و المتطابقة التوزيع

$$X_{r,n} = \sum_{i=1}^{r} \left(X_{i,n} - X_{i-1,n}\right) = \sum_{i=1}^{r} \frac{Y_i}{n-i+1}$$

و القيم المسجلة

$$X_{L(r)} = \sum_{i=1}^{r} Z_i$$

وعلى ذلك يمكن استنتاج الخواص التقاربية لمتتابعة القيم المسجلة $\left(R(X_{L(n)})\right)_n$،

حيث $R(x) = -\ln(\bar{F}(x))$، و من هذه الخواص على سبيل المثال لا الحصر نظرية النهاية المركزية (Central Limit Theorem)، و قانون القوة للأعداد الكبيرة

(a Strong Law of Large Numbers). راجع Resnick (1973).

التعميم بالنسبة للإحصاءات المرتبة المعممة هو موضوع النظرية التالية، حيث يمكن التعبير عن الإحصاء المرتب المعمم على أساس التوزيع الأسي ، كمجموع متغيرات عشوائية مستقلة ومتطابقة التوزيع ولها التوزيع الأسي.

نظرية (2.5) (Kamps 1995 a,b)

إذا كانت $X(1,n,\tilde{m},k),\ldots,X(n,n,\tilde{m},k)$ ، هي الإحصاءات المرتبة المعممة على أساس دالة التوزيع التراكمية $F(x) = 1 - e^{-\theta x}$، $x \geq 0$

فإن المتغيرات العشوائية $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$، والمعرفة على الصورة:

$$Y_j = \gamma_j \left(X(j,n,\tilde{m},k) - X(j-1,n,\tilde{m},k)\right),\ j = 1,2,\ldots,n$$

حيث $X(0,n,\tilde{m},k) \equiv 0$.

تكون مستقلة ومتطابقة التوزيع ويكون كل منها له نفس التوزيع الأسي بالمعلمة θ.

البرهان:

لنفرض أن

$$F(x)=1-e^{-\theta x}\ ,\ x\geq 0$$
$$\Rightarrow f(x)=\theta e^{-\theta x}\ ,x\geq 0$$

فإن

$$f^{X(1,n,\tilde{m},k),\ldots X(n,n,\tilde{m},k)}(x_1,\ldots,x_n)=k\left(\prod_{j=1}^{n-1}\gamma_j\right)\left(\prod_{i=1}^{n-1}\left(\bar{F}(x_i)\right)^{m_i}\ f(x_i)\right)$$
$$\times\left(\bar{F}(x_n)\right)^{k-1} f(x_n)$$

$$=\theta^n\, k\left(\prod_{j=1}^{n-1}\gamma_j\right)\left(\prod_{i=1}^{n-1}\exp(-(m_i+1)\theta x_i)\right)\cdot\exp(-\gamma_n\theta x_n),\quad k=\gamma_n$$

$$f^{X(1,n,\tilde{m},k),\ldots X(n,n,\tilde{m},k)}(x_1,\ldots,x_n)$$
$$=\theta^n\left(\prod_{j=1}^{n}\gamma_j\right)\exp\left[-\theta\left(\sum_{i=1}^{n-1}\ (m_i+1)x_i+\gamma_n x_n\right)\right]$$
$$=\theta^n\left(\prod_{j=1}^{n}\gamma_j\right)\exp\left[-\theta\left(\sum_{j=1}^{n}\ \gamma_j(x_j-x_{j-1})\right)\right],$$
$$x_0=0\quad ,x_1\leq\ldots\leq x_n$$

حيث أن

$$\gamma_{j-1}-\gamma_j=m_{j-1}+1$$
$$\sum_{j=1}^{n}\ \gamma_j(x_j-x_{j-1})=\sum_{j=1}^{n-1}\ (m_j+1)x_j+\gamma_n x_n$$

ومن تعريف Y_j، و باستخدام التحويل

$$y_j=\gamma_j(x_j-x_{j-1}),$$
$$x_j=\frac{y_j}{\gamma_j}+x_{j-1}$$

و القيمة المطلقة لمحدد اليعقوبية

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{1}{\gamma_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \frac{1}{\gamma_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \frac{1}{\gamma_n} \end{vmatrix} = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\gamma_j}$$

وعليه فإن دالة كثافة الاحتمال تصبح:

$$f^{Y_1,\dots,Y_n}(y_1,\dots,y_n) = \theta^n \exp\left[-\theta \sum_{j=1}^{n} y_j\right]$$
$$= \theta^n \prod_{j=1}^{n} \exp(-\theta\, y_j)$$

□

(2.2) عزوم الإحصاءات المرتبة المعممة

Moments of Generalized Order Statistics

في هذا الفصل سوف نستعرض أهم النتائج الخاصة بعزوم الإحصاءات المرتبة المعممة و شروط وجود العزوم لدوال في الإحصاء المرتب المعمم المفرد، وبمعنى آخر إذا أردنا إيجاد $E[\Psi(X(r,n,\tilde{m},k))]$ ، فإنه يجب علينا الإجابة على التساؤل التالي:

ماهي الشروط التي تحققها الدالة Ψ و كذلك دالة التوزيع التراكمية F حتى نضمن وجود $E[\Psi(X(r,n,\tilde{m},k))]$ ؟، و في واقع الأمر فإن الدالة Ψ يجب أن تكون قابلة للقياس (measurable function). كما يجب أن تكون الدالة F متصلة، أي أنه لا يلزم أن تكون

F مطلقة الاتصال، حيث يمكن استخدام الدالة العكسية (pseudo- inverse) F^{-1} ، و التي تُعرف بالعلاقة $F^{-1}(y)=\inf\{x: F(x)\geq y\},\ y\in(0,1)$ ، حيث F أي دالة توزيع تراكمية. كذلك سوف نعرض بعض العلاقات التكرارية للعزوم المفردة للإحصاءات المرتبة المعممة على أساس دالة توزيع تراكمية اختيارية F .

راجع David and Nagaraja(2003) في حالة الإحصاءات المرتبة العادية وكذلك Grudzień and Szynal (1983) في حالة القيم المسجلة ذات الرتبة k .

تمهيدية (2.4) (Kamps 1995 a,b)

إذا كان $X(r,n,m,k)$ هو الإحصاء المرتب الرائي على أساس دالة التوزيع F ، حيث أن $m_1=\ldots=m_{n-1}=m$ ، Ψ دالة قابلة للقياس فإن

$$E\left[\Psi\left(X(r,n,m,k)\right)\right]=\int_0^1 \Psi\left(F^{-1}(x)\right)\varphi_{r,n}(x)dx$$

البرهان

باستخدام

$$f^{U(r,n,m,k)}(t)=\varphi_{r,n}(t),\ t\in(0,1)$$

و العلاقة (2.2) يكون لدينا

$$E\left[\Psi(X(r,n,m,k))\right]=E\left(\Psi\left(F^{-1}\left(U(r,n,m,k)\right)\right)\right)$$
$$=\int_0^1 \Psi\left(F^{-1}(x)\right)\ \varphi_{r,n}(x)\,dx$$

ملاحظة (2.4)

مما سبق نجد أننا نحتاج وجود العزوم $E\left(X^{\alpha}(r,n,\tilde{m},k)\right)$ فقط. و تكون قيمة العزوم السالبة و غير الصحيحة محسوبة. وهكذا لكي تكون العزوم معرفة تعريفاً جيداً، نفرض الشروط النظامية التالية:

$F^{-1}(t)\geq 0$ لأي $t\in(0,1)$ إذا كان $\alpha\notin N, \alpha>0$ ،

$F^{-1}(t)>0$ لأي $t\in(0,1)$ إذا كان $-\alpha\notin N, \alpha<0$

$F^{-1}(t)>0$ لأي $t\in(0,1)$ أو $F^{-1}(t)<0$ لأي $t\in(0,1)$ إذا كان $-\alpha\in N$

حيث N هي مجموعة الأعداد الطبيعية.

وفي النظرية التالية، سوف نرى أن وجود العزوم الموجبة من رتبة معينة يضمن وجود العزوم للإحصاءات المرتبة المعممة من رتب أقل.

نظرية (2.6) (Kamps 1995 a,b)

إذا كان المتغير العشوائي X له دالة التوزيع التراكمية F، وكان $E|X|^{\beta} < \infty$ لبعض قيم β الموجبة، فإن $E|X(r,n,\tilde{m},k)|^{\alpha} < \infty$، لجميع قيم α التي تحقق $0 < \alpha < \beta$ وذلك عندما يكون $m_1 = ... = m_{r-1} = m$

البرهان

من متباينة Hölder ،و شكل دالة الكثافة للإحصاء المرتب المعمم $X(r,n,m,k)$ وهي $\varphi_{r,n}$ والصيغة التكاملية ، (راجع ملحق الرسالة).

مع ملاحظة $\frac{\beta}{\beta-\alpha} > 0$ نحصل على

$$E|X(r,n,\tilde{m},k)|^{\alpha} \leq \left(E|X|^{\beta}\right)^{\alpha/\beta} \left(\int_0^1 (\varphi_{r,n}(t))^{\beta/(\beta-\alpha)} dt \right)^{1-\alpha/\beta} < \infty$$

□

في النظرية السابقة ، وجود $E|X|^{\beta} < \infty$ لأي $\beta > 0$ هوشرط كافي لضمان وجود $E|X(r,n,\tilde{m},k)|^{\alpha} < \infty$ لأي $0 < \alpha < \beta$.

تمهيدية (2.5) (Kamps 1995 a,b)

لنفرض أن F دالة التوزيع للمتغير العشوائي X و $X(r,n,m,k)$، هو الإحصاء المرتب المعمم المناظر حيث $m_1 = ... = m_{n-1} = m$، وإذا كان الشرط $\{r=1\}$ أو $\{r>1 \quad m>-1\}$ أو $\{r>1$ و $m \leq -1$ و $\gamma_r > 1\}$ متحقق و كان $E\left(|X|^{\alpha}\right) < \infty$، لبعض قيم α الحقيقية، فإن $E|X(r,n,\tilde{m},k)|^{\alpha} < \infty$

الشرط السابق لا يتحقق للقيم المسجلة العادية $(m=-1, k=1)$، وقد أثبت Nagaraja (1978) بمثال أن وجود $E[X]$ لا يضمن وجود $E[X_{L(n)}]$ ، ومع ذلك فإنه يمكن تطبيق التمهيدية السابقة على القيم المسجلة من الرتبة k حيث $k > 1$ و $r > 1$.

تحت الشروط المختلفة المفروضة على دالة التوزيع F، (الاتصال المطلق للدالة F^{-1} و الاتصال للدالة F. راجع ملاحظة (2.4)).

(2.2.1) فرق العزوم لإحصاءين مرتبين معممين متعاقبين

The difference of moments of successive generalized order statistics

نظرية (2.7) (Kamps 1995 a,b)

لنفرض أن F دالة توزيع لها معكوس F^{-1} ، $r \geq 2$ ، ولنفرض أن الشروط النظامية

$$\left.\begin{array}{ll} F^{-1}(t) \geq 0 & \text{لأي } t \in (0,1) \text{ إذا كان } \alpha \notin N, \alpha > 1 \text{،} \\ F^{-1}(t) > 0 & \text{لأي } t \in (0,1) \text{ إذا كان } \alpha \notin N, \alpha < 1 - \\ F^{-1}(t) > 0 & \text{لأي } t \in (0,1) \text{ أو} \\ F^{-1}(t) < 0 & \text{لأي } t \in (0,1) \text{ إذا كان } \alpha \in N - \end{array}\right\}$$

تكون صحيحة لأي $0 \neq \alpha \in R$ و دالة التوزيع F. وبفرض $m_1 = .. = m_{n-1} = m$

وإذا كانت العزوم $E\left(X^{\alpha}(r,n,m,k)\right)$ و $E\left(X^{\alpha}(r-1,n,m,k)\right)$ للإحصاءات المرتبة المعممة على أساس دالة التوزيع F موجودة فإن:

$$E\left[X^{\alpha}(r,n,m,k)\right] - E\left[X^{\alpha}(r-1,n,m,k)\right] = \alpha \frac{c_{r-2}}{(r-1)!}\int_0^1 \left(F^{-1}(t)\right)^{\alpha-1}\left(F^{-1}\right)'(t)$$

$$\times (1-t)^{\gamma_r} g_m^{r-1}(t)dt \qquad (2.16)$$

البرهان

باستخدام التكامل بالتجزيء و استخدام تمهيدية (2.5)، و بديهية (2.1) نحصل على

$$E\left[X^{\alpha}(r,n,m,k)\right] - E\left[X^{\alpha}(r-1,n,m,k)\right] = \int_0^1 \left(F^{-1}(t)\right)^{\alpha}\left(\varphi_{r,n}(t) - \varphi_{r-1,n}(t)\right)dt$$

$$= \int_0^1 \left(F^{-1}(t)\right)^{\alpha} d\left(\Phi_{r,n}(t) - \Phi_{r-1,n}(t)\right)$$

بوضع

$$u = \left(F^{-1}(t)\right)^{\alpha} \Rightarrow du = \alpha\left(F^{-1}(t)\right)^{\alpha-1}\left(F^{-1}\right)'(t)dt$$

$$dv = d\left(\Phi_{r,n}(t) - \Phi_{r-1,n}(t)\right) \Rightarrow v = \Phi_{r,n}(t) - \Phi_{r-1,n}(t)$$

وباستخدام التكامل بالتجزيء نحصل على

$$E\left[X^{\alpha}(r,n,\tilde{m},k)\right]-E\left[X^{\alpha}(r-1,n,\tilde{m},k)\right]=-\frac{c_{r-2}}{(r-1)!}\left(F^{-1}(t)\right)^{\alpha}(1-t)^{\gamma_r}\, g_m^{r-1}(t)\Big|_0^1$$

$$+\ \alpha\,\frac{c_{r-2}}{(r-1)!}\int_0^1 \left(F^{-1}(t)\right)^{\alpha-1}\left(F^{-1}\right)'(t)(1-t)^{\gamma_r}\, g_m^{r-1}(t)dt$$

و حيث أن

$$\lim_{t\to 1-}\left(F^{-1}(t)\right)^{\alpha}(1-t)^{\gamma_r}\, g_m^{r-1}(t)=\lim_{t\to 0+}\left(F^{-1}(t)\right)^{\alpha}(1-t)^{\gamma_r}\, g_m^{r-1}(t)=0$$

فإن المقدار $\left(F^{-1}(t)\right)^{\alpha}(1-t)^{\gamma_r}\, g_m^{r-1}(t)\Big|_0^1=0$ وبالتالي نحصل على المطلوب.□

في حالة الإحصاءات المرتبة العادية العلاقة السابقة معطاة في Lin(1988). و تحت الشروط المعدلة و بدون استخدام دالة التوزيع العكسية F^{-1}، لكل $\alpha\in N$، نجد في النظرية التالية للإحصاءات المرتبة المعممة و باستخدام بديهية (2.1)، أننا نحتاج فقط إلى اتصال الدالة F، للحصول على فرق العزوم للإحصاءات المرتبة المعممة

نظرية (2.8) (Kamps 1995 a,b)

لنفرض أن F دالة توزيع متصلة، $r\geq 2$، ونفرض الشروط النظامية نفسها في نظرية (2.5) بالنسبإلى $\alpha\neq 0,\ \alpha\in R$ و F. بالإضافة لذلك نفرض أن العزوم $E\left(X^{\alpha}(r,n,m,k)\right)$ و $E\left(X^{\alpha}(r-1,n,m,k)\right)$ للإحصاءات المرتبة المعممة على أساس دالة التوزيع F موجودة، وأن $m_1=\dots m_{r-1}=m$. فإنه مع اعتبار $a=F^{-1}(0+)$ و $b=F^{-1}(1-)$، نجد أن:

$$E\left[X^{\alpha}(r,n,m,k)\right]-E\left[X^{\alpha}(r-1,n,m,k)\right]=\alpha\,\frac{c_{r-2}}{(r-1)!}\int_a^b x^{\alpha-1}\left(\overline{F}(x)\right)^{\gamma_r}$$

$$\times\, g_m^{r-1}(F(x))dx$$

و نلاحظ في نظرية (2.7) أنه إذا كانت F دالة مطلقة الاتصال، فإنه في نظرية (2.8) تتحقق العلاقة مباشرة باستخدام التحويل $t=F(x)$.

(2.3) عزوم الإحصاءات المرتبة المعممة من توزيعات خاصة

Moments of Generalized order Statistics for Specific Distributions

في هذا الفصل سوف نتعرض لبعض التوزيعات الخاصة من حيث الحصول على بعض العزوم الصريحة و العلاقات التكرارية كتطبيق على الفصل السابق، وذلك في حالة التوزيعات:

1- توزيع دالة القوى Power function distribution

2- توزيع باريتو Pareto distribution

3- توزيع وايبيل Weibull distribution

و الجدير بالذكر أن علاقات هذا الفصل موجودة في (Kamps 1995 a,b) كنتائج وقمنا بحسابها بشيء من التفصيل و حساب جداول للإحصاءات المرتبة العادية و القيم المسجلة كحالات خاصة.

(2.4.1) توزيع دالة القوى Power function distribution

إذا كانت دالة التوزيع

$$F(x) = cx^{a},\ x \in (0, c^{-1/a}),\ a, c > 0, \qquad (2.17)$$

فإن الدالة العكسية لها $x = F^{-1}(t) = \left(\frac{t}{c}\right)^{1/a},\ t \in (0,1)$

لأي $\alpha/a \in N$، فإن:

عندما $m = -1$

$$E\left[X^{\alpha}(r,n,m,k)\right] = \int_{0}^{1} \left(F^{-1}(t)\right)^{\alpha} \varphi_{r,n}(t)\,dt$$

$$= \frac{c_{r-1}}{(r-1)!} c^{-\alpha/a} \int_{0}^{1} t^{\alpha/a} (1-t)^{\gamma_r - 1} \left(-\ln(1-t)\right)^{r-1} dt$$

نضع $s = -\ln(1-t)$

$$E\left[X^{\alpha}(r,n,m,k)\right]=\frac{c_{r-1}(k)}{(r-1)!}c^{-\alpha/a}\int_{0}^{\infty}(1-e^{-s})^{\alpha/a}e^{-(k-1)s}s^{r-1}e^{-s}ds$$

$$=\frac{c_{r-1}(k)}{(r-1)!}c^{-\alpha/a}\sum_{j=0}^{\alpha/a}\binom{\alpha/a}{j}(-1)^{j}\int_{0}^{\infty}e^{-(k+j)s}s^{r-1}ds$$

$$=\frac{c_{r-1}(k)}{(r-1)!}c^{-\alpha/a}\sum_{j=0}^{\alpha/a}\binom{\alpha/a}{j}(-1)^{j}\left(\frac{1}{k+j}\right)^{r}\Gamma(r)$$

وعليه يكون

$$E\left[X^{\alpha}(r,n,m,k)\right]=c_{r-1}(k)c^{-\alpha/a}\sum_{j=0}^{\alpha/a}\binom{\alpha/a}{j}(-1)^{j}\frac{1}{c_{r-1}(k+j)}$$

و بالاقتصار على $m\neq-1$ ، فإن:

$$E\left[X^{\alpha}(r,n,m,k)\right]=\frac{c_{r-1}}{(r-1)!}c^{-\alpha/a}\int_{0}^{1}t^{\alpha/a}(1-t)^{\gamma_r-1}\left(\tfrac{1}{m+1}\left(1-(1-t)^{m+1}\right)\right)^{r-1}dt$$

$$=\frac{c_{r-1}}{(r-1)!}c^{-\alpha/a}(m+1)^{1-r}\int_{0}^{1}t^{\alpha/a}(1-t)^{\gamma_r-1}$$

$$\times\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^{j}\binom{r-1}{j}(1-t)^{j(m+1)}dt$$

$$E\left[X^{\alpha}(r,n,m,k)\right]=\frac{c_{r-1}}{(r-1)!}c^{-\alpha/a}(m+1)^{1-r}\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^{j}\binom{r-1}{j}$$

$$\times\int_{0}^{1}t^{\alpha/a}(1-t)^{\gamma_{r-j}-1}dt$$

$$=\frac{c_{r-1}}{(r-1)!}c^{-\alpha/a}(m+1)^{1-r}\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^{j}\binom{r-1}{j}B\left(\alpha/a+1,\gamma_{r-j}\right)$$

$$=\frac{c_{r-1}}{(r-1)!}c^{-\alpha/a}(m+1)^{1-r}\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^{j}\binom{r-1}{j}\frac{\Gamma(\alpha/a+1)\Gamma(\gamma_{r-j})}{\Gamma(\alpha/a+\gamma_{r-j}+1)}$$

حيث $\gamma_r+j(m+1)=\gamma_{r-j}$

حالات خاصة:

(i) عندما $a=1$ نحصل على التوزيع المنتظم، وبالتالي يمكن الحصول على عزوم الإحصاءات المرتبة المعممة على الصورة:

عندما $m=-1$

$$E\left[X^{\alpha}(r,n,m,k)\right]=c^{-\alpha}\sum_{j=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{j}(-1)^{j}\frac{c_{r-1}(k)}{c_{r-1}(k+j)}$$

عندما $m\neq-1$

$$E\left[X^{\alpha}(r,n,m,k)\right]=\frac{c_{r-1}}{(r-1)!}c^{-\alpha}(m+1)^{1-r}\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^{j}\binom{r-1}{j}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\gamma_{r-j})}{\Gamma(\alpha+\gamma_{r-j}+1)}$$

و يمكن الحصول على فرق العزوم للإحصاءات المرتبة المعممة المنتظمة عندما $m=-1$ و $\alpha=1$ على الصورة:

$$E[X(r,n,m,k)]-E[X(r-1,n,m,k)]=\frac{c_{r-2}(k)}{(r-1)!}c^{-1}\int_{0}^{1}(1-t)^{k}(-\ln(1-t))^{r-1}dt$$

و بوضع $s=-\ln(1-t)$ نحصل على:

$$E[X(r,n,m,k)]-E[X(r-1,n,m,k)]=\frac{c_{r-2}(k)}{(r-1)!}c^{-1}\int_{0}^{\infty}s^{r-1}e^{-(k+1)s}ds$$

$$=c^{-1}\frac{c_{r-2}(k)}{(r-1)!}\frac{\Gamma(r)}{(k+1)^{r}}$$

$$=c^{-1}\frac{c_{r-2}(k)}{c_{r-1}(k+1)}$$

$$=c^{-1}\frac{k^{r-1}}{(k+1)^{r}}$$

(ii) الإحصاءات المرتبة العادية

أي عندما نعوض عن $k=1$ و $m=0$

$$E\left[X^{\alpha}(r,n,0,1)\right]=r\binom{n}{r}c^{-\alpha/a}\sum_{j=o}^{r-1}(-1)^{j}\binom{r-1}{j}\frac{\Gamma(\alpha/a+1)\Gamma(n-r+j+1)}{\Gamma(\alpha/a+n-r+j+2)}$$

و باستخدام برنامج Mathematica (الإصدار السابع) حصلنا على:

$$E\left[X^{\alpha}(r,n,0,1)\right]=c^{-\alpha/a}\,\frac{n!}{(r-1)!}\frac{\Gamma(\alpha/a+r)}{\Gamma(\alpha/a+n+1)}\quad Malik\,(1967)$$

جدول (2-3) العزوم للإحصاءات المرتبة العادية من توزيع دالة القوى $(c=2, a=3, \alpha=1)$

n	r					
	1	2	3	4	5	6
2	0.5102	0.6803	***	***	***	***
3	0.4592	0.6123	0.7143	***	***	***
4	0.4239	0.5652	0.6594	0.7326	***	***
5	0.3974	0.5299	0.6182	0.6869	0.7441	***
6	0.3765	0.5020	0.5856	0.6507	0.7049	0.7519

جدول (2-4) العزوم للإحصاءات المرتبة العادية من التوزيع المنتظم $(c=2, a=1, \alpha=1)$

n	r					
	1	2	3	4	5	6
2	0.1667	0.3333	***	***	***	***
3	0.1250	0.2500	0.3750	***	***	***
4	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	***	***
5	0.08333	0.1667	0.2500	0.3333	0.4167	***
6	0.07143	0.1429	0.2143	0.2857	0.3571	0.4286

(iii) القيم المسجلة من النوع k

أي عندما نضع $k\in N$ و $m=-1$ ، حيث $\alpha/a\in N$ نحصل على

$$EX^{\alpha}(r,n,-1,k)=c^{-\alpha/a}\sum_{j=0}^{\alpha/a}\binom{\alpha/a}{j}(-1)^{j}\left(\frac{k}{k+j}\right)^{r}$$

جدول (2-5): العزوم المفردة للقيم المسجلة من توزيع دالة القوى $(c=0.5, a=2, \alpha=4)$

r	k				
	1	2	3	4	5
1	1.33333	0.666667	0.4	0.266667	0.190476
2	2.44444	1.44444	0.94	0.657778	0.485261
3	3.14815	2.12963	1.489	1.08919	0.828096
4	3.54938	2.66975	1.98715	1.51332	1.18321
5	3.76646	3.0715	2.4126	1.90531	1.52872
6	3.88049	3.36017	2.7628	2.25401	1.85206

و في حالة التوزيع المنتظم عندما $a=1$ نجد أن

$$EX^{\alpha}(r,n,-1,k)= \ c^{-\alpha}\sum_{j=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{j}(-1)^{j}\left(\frac{k}{k+j}\right)^{r}$$

و القيمة المتوقعة عندما $\alpha=1$

$$EX(r,n,-1,k)=\frac{1}{c}\left[1-\left(\frac{k}{k+1}\right)^{r}\right]$$

جدول (2-6): العزوم للقيم المسجلة من التوزيع المنتظم $(c=0.5, a=1, \alpha=1)$

r	k				
	1	2	3	4	5
1	1.	0.666667	0.5	0.4	0.333333
2	1.5	1.11111	0.875	0.72	0.611111
3	1.75	1.40741	1.15625	0.976	0.842593
4	1.875	1.60494	1.36719	1.1808	1.03549
5	1.9375	1.73663	1.52539	1.34464	1.19624
6	1.96875	1.82442	1.64404	1.47571	1.3302

(2.4.2) توزيع باريتو Pareto distribution

دالة التوزيع تعطى

$$F(x)=1-c/x^{a},\ x\in(c^{1/a},\infty),\quad a,c>0, \tag{2.18}$$

و الدالة العكسية $t\in(0,1)$ ، $F^{-1}(t)=\left(1/c(1-t)\right)^{-1/a}$

وإذا كانت α و a تحققان $\gamma_r>\alpha/a$ و $\gamma_1>\alpha/a$ فإن:

عندما $m=-1$

$$E\left[X^{\alpha}(r,n,m,k)\right]=\frac{c_{r-1}}{(r-1)!}c^{\alpha/a}\int_{0}^{1}(1-t)^{k-\alpha/a-1}(-\ln(1-t))^{r-1}dt$$

و بوضع $s=-\ln(1-t)$ نحصل على

$$E\left[X^{\alpha}(r,n,m,k)\right]=\frac{c_{r-1}}{(r-1)!}c^{\alpha/a}\int_{0}^{\infty} s^{r-1}e^{-(k-\alpha/a)s}ds$$

$$=c^{\alpha/a}\frac{c_{r-1}(k)}{(r-1)!}\frac{\Gamma(r)}{(k-\alpha/a)^{r}}$$

$$=c^{\alpha/a}\frac{c_{r-1}(k)}{c_{r-1}(k-\alpha/a)}$$

و عندما $m\neq-1$

$$E\left[X^{\alpha}(r,n,m,k)\right]=\frac{c_{r-1}}{(r-1)!}\frac{c^{\alpha/a}}{(m+1)^{r-1}}\int_{0}^{1}(1-t)^{\gamma_r-\alpha/a-1}\left(1-(1-t)^{m+1}\right)^{r-1}dt$$

و بوضع $s=(1-t)^{m+1}$ نحصل على

$$E\left[X^{\alpha}(r,n,m,k)\right]=\frac{c_{r-1}}{(r-1)!}\frac{c^{\alpha/a}}{(m+1)^{r}}\int_{0}^{1} s^{\frac{\gamma_r-\alpha/a}{m+1}-1}(1-s)^{r-1}ds$$

$$=\frac{c_{r-1}}{(r-1)!}\frac{c^{\alpha/a}}{(m+1)^{r}}B\left(\frac{\gamma_r-\alpha/a}{m+1},r\right)$$

$$=\frac{c_{r-1}}{(r-1)!}\frac{c^{\alpha/a}}{(m+1)^{r}}\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_r-\alpha/a}{m+1}\right)\Gamma(r)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_r-\alpha/a}{m+1}+r\right)}$$

حالات خاصة

(i) الإحصاءات المرتبة العادية

أي عندما نعوض عن $k=1$ و $m=0$

$$E\left(X^{\alpha}(r,n,0,1)\right)=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}c^{\alpha/a}\frac{\Gamma(n-r-\alpha/a+1)\Gamma(r)}{\Gamma(n-\alpha/a+1)}$$

$$=\frac{n!}{(n-r)!}c^{\alpha/a}\frac{\Gamma(n-r-\alpha/a+1)}{\Gamma(n-\alpha/a+1)}$$

جدول (2-7) العزوم للإحصاءات المرتبة العادية من توزيع باريتو

$(c = 2, a = 3, \alpha = 1)$

n	r					
	1	2	3	4	5	6
2	1.512	2.268	***	***	***	***
3	1.417	1.701	2.551	***	***	***
4	1.374	1.546	1.856	2.783	***	***
5	1.350	1.473	1.657	1.988	2.982	***
6	1.334	1.429	1.559	1.754	2.105	3.158

(ii) القيم المسجلة من النوع k

أي عندما نضع $k \in N$ و $m = -1$ نحصل على

$$EX^{\alpha}(r, n, -1, k) = c^{\alpha/a}\left(\frac{k}{(k - \alpha/a)}\right)^{r}$$

جدول (2-8) العزوم للقيم المسجلة من توزيع باريتو $(c = 2, a = 3, \alpha = 1)$

r	k				
	1	2	3	4	5
1	1.890	1.512	1.417	1.374	1.350
2	2.835	1.814	1.595	1.499	1.446
3	4.252	2.177	1.794	1.636	1.550
4	6.378	2.613	2.018	1.784	1.660
5	9.568	3.135	2.270	1.947	1.779
6	14.35	3.762	2.554	2.124	1.906

جدول (2-9) العزوم للقيم المسجلة من توزيع باريتو $(c = 2, a = 3, \alpha = 2)$

r	k				
	1	2	3	4	5
1	4.762	2.381	2.041	1.905	1.832
2	14.29	3.572	2.624	2.286	2.113
3	42.86	5.357	3.374	2.743	2.439
4	128.6	8.036	4.338	3.292	2.814
5	385.7	12.05	5.577	3.950	3.247
6	1157	18.08	7.171	4.740	3.746

(2.4.3) توزيع وايبيل Weibull distribution

دالة التوزيع

$$F(x)=1-\exp\left(-cx^{a}\right),\ x\in(0,\infty),\ a,c>0, \qquad (2.19)$$

و الدالة العكسية $F^{-1}(t)=\left(\frac{1}{c}\ln\frac{1}{1-t}\right)^{1/a}$

لأي $\alpha/a+1>0$ فإنه

عندما $m=-1$

$$E\left(X^{\alpha}(r,n,m,k)\right)=\frac{c_{r-1}(k)}{(r-1)!}c^{-\alpha/a}\int_{0}^{1}(1-t)^{k-1}(-\ln(1-t))^{\alpha/a+r-1}dt$$

باستخدام التعويض في العلاقة (2.17)

$$E\left(X^{\alpha}(r,n,m,k)\right)=\frac{c_{r-1}(k)}{(r-1)!}c^{-\alpha/a}\int_{0}^{\infty}s^{\alpha/a+r-1}e^{-ks}ds$$

$$=c^{-\alpha/a}\,\frac{c_{r-1}(k)}{\Gamma(r)}\,\frac{\Gamma(\alpha/a+r)}{c_{\alpha/a+r-1}(k)}$$

عندما $m\neq-1$

$$E\left(X^{\alpha}(r,n,m,k)\right)=\frac{c_{r-1}}{(r-1)!}c^{-\alpha/a}\int_{0}^{1}(-\ln(1-t))^{\alpha/a}(1-t)^{\gamma_r-1}$$

$$\times\left(\tfrac{1}{m+1}\left(1-(1-t)^{m+1}\right)\right)^{r-1}dt$$

$$=\frac{c_{r-1}}{(r-1)!}\frac{c^{-\alpha/a}}{(m+1)^{r-1}}\sum_{j=0}^{r-1}\binom{r-1}{j}(-1)^{j}\int_{0}^{1}(-\ln(1-t))^{\alpha/a}$$

$$\times(1-t)^{\gamma_r+j(m+1)-1}dt$$

$$E\left(X^{\alpha}(r,n,m,k)\right)=\frac{c_{r-1}}{(r-1)!}\frac{c^{-\alpha/a}}{(m+1)^{r-1}}\sum_{j=0}^{r-1}\binom{r-1}{j}(-1)^{j}\int_{0}^{1}(-\ln(1-t))^{\alpha/a}$$

$$\times(1-t)^{\gamma_{r-j}-1}dt$$

باستخدام التعويض في العلاقة (2.17)

$$E\left(X^{\alpha}(r,n,m,k)\right)=\frac{c_{r-1}}{(r-1)!}c^{-\alpha/a}(m+1)^{1-r}\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^{j}\binom{r-1}{j}$$

$$\times\int_{0}^{\infty}s^{\alpha/a}e^{-\gamma_{r-j}s}ds$$

$$=\frac{c_{r-1}}{(r-1)!}c^{-\alpha/a}(m+1)^{1-r}\sum_{j=o}^{r-1}(-1)^{j}\binom{r-1}{j}\Gamma(\alpha/a+1)\left(\gamma_{r-j}\right)^{-(\alpha/a+1)}$$

حالات خاصة

(i) عندما $a=1$ نحصل على التوزيع الأسي بالدالة التوزيع $F(x)=1-e^{-cx}$ ، $x>0$

و بالتالي يمكننا الحصول على عزوم الإحصاءات المرتبة المعممة للتوزيع الأسي على الصورة:

عندما $m=-1$

$$E\left(X^{\alpha}(r,n,m,k)\right)=c^{-\alpha}\frac{c_{r-1}(k)}{\Gamma(r)}\frac{\Gamma(\alpha+r)}{c_{\alpha+r-1}(k)}$$

عندما $m\neq-1$

$$E\left(X^{\alpha}(r,n,m,k)\right)=\frac{c_{r-1}}{(r-1)!}c^{-\alpha}(m+1)^{1-r}\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^{j}\binom{r-1}{j}\Gamma(\alpha+1)\left(\gamma_{r-j}\right)^{-(\alpha+1)}$$

و يكون فرق العزوم للإحصاءات المرتبة المعممة على أساس دالة التوزيع الأسي عندما $m=-1$ و $\alpha=1$ يعطى بالعلاقة:

$$E\left(X(r,n,m,k)\right)-E\left(X(r-1,n,m,k)\right)=\frac{c_{r-2}}{(r-1)!}c^{-1}\int_{0}^{1}(1-t)^{k-1}$$

$$\times\left(-\ln(1-t)\right)^{r-1}dt$$

$$=\frac{c_{r-2}}{(r-1)!}c^{-1}\int_{0}^{\infty}y^{r-1}e^{-ky}dy$$

$$=c^{-1}\frac{c_{r-2}(k)}{(r-1)!}\frac{\Gamma(r)}{(k)^{r}}$$

$$=(ck)^{-1}$$

حيث $E\left(X(0,n,m,k)\right)=0$

(ii) الإحصاءات المرتبة العادية

أي عندما نعوض عن $k=1$ و $m=0$

$$E\left(X^{\alpha}(r,n,0,1)\right)=r\binom{n}{r}c^{-\alpha/a}\Gamma(\alpha/a+1)(\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^{j}\binom{r-1}{j}\left(n-r+j+1\right)^{-(\alpha/a+1)}$$

جدول (2-10) العزوم للإحصاءات المرتبة العادية من توزيع وايبل($c=2, a=3, \alpha=1$)

n	r					
	1	2	3	4	5	6
2	0.5625	0.8550	***	***	***	***
3	0.4914	0.7048	0.9301	***	***	***
4	0.4465	0.6262	0.7833	0.9790	***	***
5	0.4145	0.5745	0.7038	0.8363	1.015	***
6	0.3900	0.5367	0.6502	0.7575	0.8757	1.042

جدول (2.11) العزوم للإحصاءات المرتبة العادية من التوزيع الأسي ($c=2, a=1, \alpha=1$)

n	r					
	1	2	3	4	5	6
2	0.2500	0.7500	***	***	***	***
3	0.1667	0.4167	0.9167	***	***	***
4	0.1250	0.2917	0.5417	1.042	***	***
5	0.1000	0.2250	0.3917	0.6417	1.142	***
6	0.08333	0.1833	0.3083	0.4750	0.7250	1.225

(iii) القيم المسجلة من النوع k

أي عندما نضع $k \in N$ و $m=-1$

$$E\left(X^{\alpha}(r,n,m,k)\right)=\frac{c^{-\alpha/a}}{\Gamma(r)}\frac{\Gamma(\alpha/a+r)}{k^{\alpha/a}}$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha/a+r)}{(ck)^{\alpha/a}\,\Gamma(r)}$$

وعندما $\alpha=1$

$$E\left(X(r,n,m,k)\right)=\frac{\Gamma(1/a+r)}{(ck)^{1/a}\,\Gamma(r)}$$

و في حالة التوزيع الأسي $(a=1)$

$$E\left(X(r,n,m,k)\right)=\frac{r}{ck}$$

جدول (2-12) العزوم للقيم المسجلة من توزيع وايبل $(c=2, a=3, \alpha=1)$

r	k				
	1	2	3	4	5
1	0.7088	0.5625	0.4914	0.4465	0.4145
2	0.9450	0.7501	0.6552	0.5953	0.5526
3	1.103	0.8751	0.7644	0.6945	0.6448
4	1.225	0.9723	0.8494	0.7717	0.7164
5	1.327	1.053	0.9202	0.8360	0.7761
6	1.416	1.124	0.9815	0.8918	0.8278

جدول (2-13) العزوم للقيم المسجلة من توزيع وايبل $(c=3, a=4, \alpha=3)$

r	k				
	1	2	3	4	5
1	0.4032	0.2397	0.1769	0.1425	0.1206
2	0.7056	0.4195	0.3095	0.2495	0.2110
3	0.9702	0.5769	0.4256	0.3430	0.2901
4	1.213	0.7211	0.5320	0.4288	0.3627
5	1.440	0.8563	0.6318	0.5091	0.4307
6	1.656	0.9847	0.7265	0.5855	0.4953

جدول (2-14) العزوم للقيم المسجلة من التوزيع الأسي $(c=2, a=1, \alpha=1)$

r	k				
	1	2	3	4	5
1	0.5000	0.2500	0.1667	0.1250	0.1000
2	1.000	0.5000	0.3333	0.2500	0.2000
3	1.500	0.7500	0.5000	0.3750	0.3000
4	2.000	1.000	0.6667	0.5000	0.4000
5	2.500	1.250	0.8333	0.6250	0.5000
6	3.000	1.500	1.000	0.7500	0.6000

التعليق على النتائج:

نلاحظ من النتائج التي حصلنا عليها من الجداول السابقة ما يلي:

1 − توزيع دالة القوى: $\alpha/a \in N_0$

(i)− الإحصاءات المرتبة العادية

- كلما كبر حجم العينة n،قلت قيمة العزوم، (تؤول إلى الصفر)
- كلما كبرت القوى a كبرت قيمة العزوم،بينما كلما كبرت c قلت قيمة العزوم.
- كلما كبرت رتبة العزم α، قلت قيمته.

(ii)− القيم المسجلة

- كلما كبرت رتبة التسجيل k قلت قيمة العزوم

2 − توزيع باريتو:

(i)− الإحصاءات المرتبة العادية

- كلما كبر حجم العينة n،قلت قيمة العزوم.

(ii)− القيم المسجلة

- كلما كبرت رتبة التسجيل k قلت قيمة العزوم
- كلما كبرت رتبة العزم α كبرت قيمة العزوم

3 − توزيع وايبل

(i)− الإحصاءات المرتبة العادية

- كلما كبر حجم العينة n،قلت قيمة العزوم
- كلما كبرت القوى a كبرت قيمة العزوم.

(ii)− القيم المسجلة

- كلما كبرت القوى a كبرت قيمة العزوم.
- بينما كلما كبرت c قلت قيمة العزوم.

البَابُ الثَّالِثُ

الإحصاءات المرتبة المعممة في الحالة العامة

Generalized Order Statistics in General Case

الباب الثالث

الإحصاءات المرتبة المعممة في الحالة العامة

Generalized Order Statistics in General Case

مقدمة

في هذا الباب تم دراسة الإحصاءات المرتبة المعممة في حالة أعم من الباب الثاني،حيث يحتوي الفصل الأول من هذا الباب على دراسة نظرية التوزيع للإحصاءات المرتبة المعممة في الحالة العامة من حيث الحصول على دالة الكثافة الهامشية و دالة التوزيع الهامشية، بالإضافة إلى دالة الكثافة المشتركة و المشروطة للإحصاءات المرتبة المعممة في الحالة العامة، ويشتمل الفصل الثاني على دراسة عزوم الإحصاءات المرتبة المعممة وفروق العزوم لإحصاءين مرتبين معممين متعاقبين وكذلك العلاقات التكرارية لدوال التوزيع والعزوم للإحصاءات المرتبة المعممة في الحالة العامة. أما في الفصل الثالث فنطبق العلاقات السابقة للحصول على عزوم الإحصاءات المرتبة المعممة في الحالة العامة والمأخوذة من توزيع دالة القوى وتوزيع باريتو وتوزيع وايبل، و الحصول على العزوم في حالة الإحصاءات المرتبة العادية و المتعاقبة، بالإضافة لتسجيلات Pfeifer كحالات خاصة.

المراجع الأساسية لهذا الباب هي ((Kamps and Cramer(2001)).

(3.1) نظرية التوزيع للإحصاءات المرتبة المعممة في حالة $\gamma_i \neq \gamma_j$ لكل $i \neq j$

Distribution Theory of Generalized Order Statistics in the Case $\gamma_i \neq \gamma_j, \forall i \neq j$

في الباب الثاني تمت دراسة الإحصاءات المرتبة المعممة مع وضع قيود على المتجه $\tilde{m}$ أي تحت الشرط $m_1 = \ldots = m_{n-1} = m$، حيث أن نظرية التوزيع في الحالة العامة مع أي متجه $\tilde{m}$ تكون أكثر تعقيداً. وفي الواقع فإن الفصل السابق من الإحصاءات المرتبة يتضمن نماذج المتغيرات العشوائية المرتبة التالية:

1- الإحصاءات المرتبة العادية Ordinary Order Statistics

أي في حالة $k = 1$ و $m = 0$

2- القيم المسجلة العادية Ordinary Record Values

في حالة $k \in N$ و $m=-1$

3 - الإحصاءات المرتبة المراقبة التتابعية من النوع الثاني في حالة خاصة

Progressive type II Censoring Order Statistics

4 - الإحصاءات المرتبة بحجم عينة عدد غير صحيح.

Order Statistics with non-Integral Sample Size

وفي هذا الباب سوف نستبدل الشرط السابق بشرط أضعف وهو $\gamma_i \neq \gamma_j \;, \forall i \neq j$.
ومن الجدير بالذكر هنا أن هذا الشرط يستبعد فقط حالة القيم المسجلة العادية المناظرة للحالة $m_1 = ... = m_{n-1} = -1$، $(\gamma_1 = ... = \gamma_n = k)$.

نظرية (3.1) (Kamps and Cramer 2001)

بفرض أن $X(r,n,\tilde{m},k)$ و $X(s,n,\tilde{m},k)$ هما إحصاءان مرتبان معممان، حيث $r<s$ و $\gamma_i \neq \gamma_j$ لكل $i \neq j$.

فإن دالة الكثافة و دالة التوزيع الهامشية للإحصاء $X(r,n,\tilde{m},k)$ تعطى على الصورة

$$f^{X(r,n,\tilde{m},k)}(x) = c_{r-1} f(x) \sum_{i=1}^{r} a_i \left(\overline{F}(x)\right)^{\gamma_i - 1},$$

$$F^{X(r,n,\tilde{m},k)}(x) = 1 - c_{r-1} f \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i}{\gamma_i} \left(\overline{F}(x)\right)^{\gamma_i}, \; 1 \le r \le n,$$

حيث أن $a_i = a_i(r) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} \frac{1}{\gamma_j - \gamma_i}$

و دالة الكثافة المشتركة للإحصاءين $X(r,n,\tilde{m},k)$ و $X(s,n,\tilde{m},k)$ تكون على الصورة:

$$f^{X(r,n,\tilde{m},k),X(s,n,\tilde{m},k)}(x_r,x_s)=c_{s-1}\left(\sum_{i=r+1}^{s} a_i^{(r)}(s)\left(\frac{\overline{F}(x_s)}{\overline{F}(x_r)}\right)^{\gamma_i}\right)$$

$$\times\left(\sum_{j=1}^{r} a_j(r)\left(\overline{F}(x_r)\right)^{\gamma_j}\right)\frac{f(x_r)}{\overline{F}(x_r)}\frac{f(x_s)}{\overline{F}(x_s)},$$

$$x_r \le x_s,\ 1\le r<s\le n$$

حيث أن $r+1\le i\le s$, $a_i^{(r)}(s)=\prod_{\substack{j=r+1\\ j\ne i}}^{s}\frac{1}{\gamma_j-\gamma_i}$.

البرهان

نعلم من نظرية (2.5) أن المتغيرات العشوائية

$$D_1=\gamma_1 Y(1,n,\tilde{m},k)$$
$$D_r=\gamma_r\left[Y(r,n,\tilde{m},k)-Y(r-1,n,\tilde{m},k)\right],\qquad 2\le r\le n$$

للإحصاءات المرتبة المعمم ة على أساس التوزيع الأسي $\exp(\theta)$، تكون مستقلة ومتطابقة التوزيع بالنسبة للتوزيع الأسي $\exp(\theta)$، حيث $\theta>0$، والقيمة المتوقعة $1/\theta$.

و لنفرض أن $X(i,n,\tilde{m},k)$ حيث $i=1,2,...,n$، هي إحصاءات مرتبة معممة على أساس دالة التوزيع F. و $Y(i,n,\tilde{m},k)$ حيث $i=1,2,...,n$، هي الإحصاءات المرتبة المعممة القائمة على $G(y)=1-e^{-y}$، و بفرض أن $\gamma_i\ne\gamma_j$ لكل $i\ne j$. إذن لأي $1\le r\le n$، فإن دالة التوزيع للإحصاء $Y(r,n,\tilde{m},k)$ تعطى بالعلاقة

$$P\left(Y(r,n,\tilde{m},k)\le x\right)=P\left(\sum_{i=1}^{r}\frac{D_i}{\gamma_i}\le x\right),\ x\in R \qquad (3.1)$$

و لأي $1\le r<s\le n$ دالة التوزيع التراكمية المشتركة للإحصاءين $Y(r,n,\tilde{m},k)$ و $Y(s,n,\tilde{m},k)$ تعطى بالعلاقة

$$P\left(Y(r,n,\tilde{m},k)\le x_r, Y(s,n,\tilde{m},k)\le x_s\right)=P\left(\sum_{i=1}^{r}\frac{D_i}{\gamma_i}\le x_r,\sum_{j=1}^{s}\frac{D_j}{\gamma_j}\le x_s\right)$$

$$P\left(Y(r,n,\tilde{m},k) \le x_r , Y(s,n,\tilde{m},k) \le x_s\right)$$

$$= \int_0^{x_r} P\left(\sum_{j=1}^{s} \frac{D_j}{\gamma_j} \le x_s - z \right) dP^{\sum_{i=1}^{r} \frac{D_i}{\gamma_i}}(z),\ x_r, x_s \in R,\ x_r < x_s \qquad (3.2)$$

(راجع (Kamps and Cramer(2001)

وبالتالي دالة كثافة الاحتمال نحصل عليها بتفاضل دالة التوزيع

$$f^{Y(r,n,\tilde{m},k),Y(s,n,\tilde{m},k)}(x_r, x_s) = f^{\sum_{j=r+1}^{s} \frac{D_j}{\gamma_j}}(x_r - x_s)\, f^{\sum_{i=1}^{r} \frac{D_i}{\gamma_i}}(x_r) \qquad (3.3)$$

و باستخدام الصورة الصريحة لدالة التوزيع للمتغير $\sum_{i=1}^{r} \frac{D_i}{\gamma_i}$ (راجع (1967) Likeš و

Johnson et al.(1994) صفحة 552)، وهي

$$F^{\sum_{i=1}^{r} \frac{D_i}{\gamma_i}}(t) = 1 - c_{r-1} \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\gamma_i} a_i e^{-\gamma_i t} ,\ \ t > 0$$

نحصل على دالة كثافة الاحتمال للمتغير $\sum_{i=1}^{r} \frac{D_i}{\gamma_i}$ بتفاضل العلاقة السابقة

$$f^{\sum_{i=1}^{r} \frac{D_i}{\gamma_i}}(t) = c_{r-1} \sum_{i=1}^{r} a_i e^{-\gamma_i t} ,\ \ t > 0 \qquad (3.4)$$

وحيث أن

$$G\left(Y(i,n,\tilde{m},k)\right) = G\left(\sum_{k=1}^{i} \frac{D_k}{\gamma_k} \right) = U(i,n,\tilde{m},k) = 1 - e^{-t}$$

و عليه باستخدام التحويل في العلاقة (2.2) فإن $t = -\ln\left(\overline{F}(x)\right)$، وبالتالي

$$|J| = \left| \frac{dt}{dx} \right| = \left| \frac{f(x)}{\overline{F}(x)} \right|$$

بالتعويض في العلاقة (3.4) نحصل على دالة الكثافة $f^{X(r,n,\tilde{m},k)}$ و بتكاملها نحصل على دالة التوزيع $F^{X(r,n,\tilde{m},k)}$ للإحصاء المرتب المعمم $X(r,n,\tilde{m},k)$.

أما دالة الكثافة المشتركة للإحصاءين $X(r,n,\tilde{m},k)$ و $X(s,n,\tilde{m},k)$ ، فنحصل عليها من العلاقة (3.3) حيث أن

$$f^{\sum_{i=r+1}^{s}\frac{D_i}{\gamma_i}}(x_s-x_r)=\frac{c_{s-1}}{c_{r-1}}\sum_{i=r+1}^{s}a_i^{(r)}(s)\left(e^{-(x_s-x_r)}\right)^{\gamma_i}$$

و باستخدام العلاقة (2.2) نحصل على المطلوب.

□

حالة خاصة:

في حالة الإحصاءات المرتبة العادية $X_{1;n},..,X_{n;n}$ على أساس دالة التوزيع F، أي عندما $k=1$ و $m=0$، فإن $\gamma_j=n-j+1$ و عليه فإن:

$$a_i(r)=\frac{1}{\gamma_1-\gamma_i}\cdot\frac{1}{\gamma_2-\gamma_i}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\gamma_{i-2}-\gamma_i}\cdot\frac{1}{\gamma_{i-1}-\gamma_i}\frac{1}{\gamma_{i+1}-\gamma_i}\cdot$$

$$\times\ldots\cdot\frac{1}{\gamma_{r-1}-\gamma_i}\frac{1}{\gamma_r-\gamma_i}$$

$$=\frac{1}{i-1}\frac{1}{i-2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(-1)\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{-1}{r-i-1}\right)\left(\frac{-1}{r-i}\right)$$

$$a_i(r)=\frac{(-1)^{r-i}}{(i-1)!(r-i)!}$$

و بالتالي فإن دالة كثافة الاحتمال للإحصاء المرتب $X_{r,n}$ تعطى بالعلاقة

$$f^{X_{r:n}}(x)=\prod_{i=1}^{r}(n-i+1)f(x)\sum_{i=1}^{r}\frac{(-1)^{r-i}}{(i-1)!(r-i)!}\left(\bar{F}(x)\right)^{n-i}$$

$$=\frac{n!}{(n-r)!}f(x)\left[\frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!}\left(F(x)\right)^{n-1}+\ldots+\frac{(-1)}{(r-2)!}\left(F(x)\right)^{n-r+1}\right.$$

$$\left.+\frac{(-1)}{(r-1)!}\left(\bar{F}(x)\right)^{n-r}\right]$$

و بأخذ $\frac{\left(\bar{F}(x)\right)^{n-r}}{(r-1)!}$ كعامل مشترك

$$f^{X_{r:n}}(x)=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\left(\bar{F}(x)\right)^{n-r}f(x)\left[\frac{(-1)^{r-1}(r-1)!}{(r-1)!}\left(\bar{F}(x)\right)^{r-1}\right.$$

$$\left.+\ldots+\frac{(-1)^{r-2}(r-1)!}{(r-2)!}\left(\bar{F}(x)\right)+1\right]$$

$$f^{X_{r:n}}(x)=r\binom{n}{r}\left(\bar{F}(x)\right)^{n-r}\ f(x)\left[\binom{r-1}{0}(-1)^{r-1}\left(\bar{F}(x)\right)^{r-1}\right.$$

$$\left.+\ldots+\binom{r-1}{r-2}\left(\bar{F}(x)\right)+1\right]$$

$$f^{X_{r:n}}(x)=r\binom{n}{r}\left(F(x)\right)^{r-1}\left(\bar{F}(x)\right)^{n-r}\ f(x)$$

و هي نفس العلاقة (1.3).

باستخدام نظريتي (3.1) يمكننا الحصول على صورة صريحة لدالة الكثافة المشروطة للإحصاءات المرتبة المعممة وعلى وجه التحديد القائمة على دالة التوزيع F المقطوعة من اليسار.

تمهيدية (3.1) (Kamps and Cramer 2001)

$$f^{X(s,n,\tilde{m},k)|X(r,n,\tilde{m},k)}(x_s|x_r)=\frac{c_{s-1}}{c_{r-1}}\sum_{i=r+1}^{s}a_i^{(r)}(s)\left(\frac{1-F(x_s)}{1-F(x_r)}\right)^{\gamma_i}\frac{f(x_s)}{\bar{F}(x_s)},$$

$$x_r\le x_s,1\le r<s\le n$$

البرهان

مباشرة من نظرية (3.1) و بالتعويض في

$$f^{X(s,n,\tilde{m},k)|X(r,n,\tilde{m},k)}(x_s|\ x_r)=\frac{f^{X(r,n,\tilde{m},k),X(s,n,\tilde{m},k)}(x_r,x_s)}{f^{X(r,n,\tilde{m},k)}(x_r)}$$

نحصل على المطلوب.

□

و من الجدير بالذكر أن العلاقة السابقة تمثل أيضاً دالة الكثافة للإحصاء المرتب المعمم $Z(s-r,n-r,\tilde{\mu},k)$ على أساس دالة التوزيع

$$H_x(y)=\frac{F(y)-F(x)}{1-F(x)},\ \ y\ge x$$

حيث أن

$$\tilde{\mu}=(\mu_1,\ldots,\mu_{n-r-1})=(m_{r+1},\ldots m_{n-1})$$

دالة التوزيع للمدى الجزئي (sub range) نحصل عليها مباشرة من دالة الكثافة المشتركة لإحصاءين مرتبين معممين المذكورة في نظرية (3.1).

نظرية (3.2) (Kamps and Cramer 2001)

بفرض أن $W_{r,s} = X(s,n,\tilde{m},k) - X(r,n,\tilde{m},k)$ لأي $1 \le r < s \le n$, فإن:

$$f^{W_{r,s}}(w) = c_{s-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{i=r+1}^{s} a_i^{(r)}(s) \left(\frac{\overline{F}(v+w)}{\overline{F}(v)} \right)^{\gamma_i} \right) \left(\sum_{i=1}^{r} a_i(r) \left(\overline{F}(v) \right)^{\gamma_i} \right) \times \frac{f(v)}{\overline{F}(v)} \frac{f(v+w)}{\overline{F}(v+w)} dv$$

$$F^{W_{r,s}}(w) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} H\left(\frac{\overline{F}(v+w)}{\overline{F}(v)}; r,s \right) dF^{X(r,n,\tilde{m},k)}(v)$$

حيث أن H تعرف كما يلي

$$H(z;r,s) = \frac{c_{s-1}}{c_{r-1}} \sum_{i=r+1}^{s} a_i^{(r)}(s) \frac{1}{\gamma_i} z^{\gamma_i}, \; z \in [0,1]$$

البرهان

بوضع $w = x_s - x_r$ و $v = x_r$ مع ملاحظة أن $x_s > x_r$ لكل $s > r$ ، فيكون $w > 0$. وبأخذ التحويل العكسي على الصورة $x_r = v, x_s = v + w$ وتكون القيمة المطلقة لمحدد اليعقوبية J هي الوحدة، وباستخدام نظرية التحويل نحصل على دالة الكثافة المشتركة لـــ $V, W_{r,s}$ ، كما يلي

$$f^{V,W_{r,s}}(w,v) = c_{s-1} \left(\sum_{i=r+1}^{s} a_i^{(r)}(s) \left(\frac{\overline{F}(v+w)}{\overline{F}(v)} \right)^{\gamma_i} \right) \left(\sum_{i=1}^{r} a_i(r) \left(\overline{F}(v) \right)^{\gamma_i} \right) \times \frac{f(v)}{\overline{F}(v)} \frac{f(v+w)}{\overline{F}(v+w)}, \qquad -\infty < v < \infty, 0 < w < \infty$$

وبالتكامل بالنسبة لـــ v نحصل على:

$$f^{W_{r,s}}(w)=c_{s-1}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{i=r+1}^{s}a_i^{(r)}(s)\left(\frac{\overline{F}(v+w)}{\overline{F}(v)}\right)^{\gamma_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{r}a_i(r)\left(\overline{F}(v)\right)^{\gamma_i}\right)$$

$$\times\frac{f(v)}{\overline{F}(v)}\frac{f(v+w)}{\overline{F}(v+w)}dv$$

ويمكن الحصول على دالة التوزيع لـــ $W_{r,s}$ كما يلي

$$F^{W_{r,s}}(w)=P(W_{r,s}\le w)=\int_{0}^{w}f^{W_{r,s}}(t)dt$$

$$=c_{s-1}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{r}a_i(r)\left(\overline{F}(v)\right)^{\gamma_i-1}f(v)I_i(v,w)dv \qquad (3.5)$$

حيث

$$I_i(v,w)=\sum_{i=r+1}^{s}a_i^{(r)}(s)\left(\overline{F}(v)\right)^{-\gamma_i}\int_{0}^{w}\left(\overline{F}(v+t)\right)^{\gamma_i-1}f(v+t)dt$$

$$=\sum_{i=r+1}^{s}\frac{a_i^{(r)}(s)}{\gamma_i}\left(\overline{F}(v)\right)^{-\gamma_i}\left[\left(\overline{F}(v)\right)^{\gamma_i}-\left(\overline{F}(v+w)\right)^{\gamma_i}\right]$$

$$=\sum_{i=r+1}^{s}\frac{a_i^{(r)}(s)}{\gamma_i}\left[1-\left(\frac{\overline{F}(v+w)}{\overline{F}(v)}\right)^{\gamma_i}\right] \qquad (3.6)$$

بالتعويض من (3.6)في (3.5) مع الرجوع لتعريف $f^{X(r,n,\tilde{m},k)}(v)$ نجد أن

$$F^{W_{r,s}}(w)=\frac{c_{s-1}}{c_{r-1}}\int_{-\infty}^{\infty}f^{X(r,n,\tilde{m},k)}(v)I_i(v,w)dv$$

$$=\frac{c_{s-1}}{c_{r-1}}\int_{-\infty}^{\infty}f^{X(r,n,\tilde{m},k)}(v)\sum_{i=r+1}^{s}\frac{a_i^{(r)}(s)}{\gamma_i}\left[1-\left(\frac{\overline{F}(v+w)}{\overline{F}(v)}\right)^{\gamma_i}\right]dv$$

$$F^{W_{r,s}}(w)=\frac{c_{s-1}}{c_{r-1}}\sum_{i=r+1}^{s}\frac{a_i^{(r)}(s)}{\gamma_i}\int_{-\infty}^{\infty} f^{X(r,n,\tilde{m},k)}(v)dv-\frac{c_{s-1}}{c_{r-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{i=r+1}^{s}\frac{a_i^{(r)}(s)}{\gamma_i}$$

$$\times\left(\frac{\overline{F}(v+w)}{\overline{F}(v)}\right)^{\gamma_i} f^{X(r,n,\tilde{m},k)}(v)dv$$

$$=\frac{c_{s-1}}{c_{r-1}}\sum_{i=r+1}^{s}\frac{a_i^{(r)}(s)}{\gamma_i}-\int_{-\infty}^{\infty} H\left(\frac{\overline{F}(v+w)}{\overline{F}(v)}\right)^{\gamma_i} dF^{X(r,n,\tilde{m},k)}(v)$$

$$F^{W_{r,s}}(w)=1-\int_{-\infty}^{\infty} H\left(\frac{\overline{F}(v+w)}{\overline{F}(v)}\right)^{\gamma_i} dF^{X(r,n,\tilde{m},k)}(v)$$

حيث أن

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{X(s,n,\tilde{m},k)|X(r,n,\tilde{m},k)}(x_s|\ x_r)dx_s=1$$

ومن ثم نحصل على $\frac{c_{s-1}}{c_{r-1}}\sum_{i=r+1}^{s}\frac{a_i^{(r)}(s)}{\gamma_i}=1$

□

(3.2) العزوم و العلاقات التكرارية **Moments and Recurrence Relations**

تعتبر العلاقة التكرارية من العلاقات المهمة لعزوم الإحصاءات المرتبة العادية $X_{1,n},...,X_{n,n}$. كما يمكن أن نعبر عن دوال الكثافة و دوال التوزيع بمثل ذلك.
وتوجد للإحصاءات المرتبة المعممة عندما $m_1=...=m_{n-1}=m$، علاقات تكرارية مناظرة لدوال الكثافة ودوال التوزيع و العزوم للإحصاءات المرتبة المعممة، يمكن الرجوع إليها في (Kamps 1995a) الصفحات (71-72,75,116).

تمهيدية (3.2) (Kamps and Cramer 2001)

$$\gamma_{r+1,n} f^{X(r,n,\tilde{m}_n,k)}(x)+\left(\gamma_{1,n}-\gamma_{r+1,n}\right)f^{X(r+1,n,\tilde{m}_n,k)}(x)$$
$$=\gamma_{1,n} f^{X(r,n-1,\tilde{m}_{n-1},k)}(x),\qquad 1\le r\le n-1 \qquad (3.7)$$

حيث $\tilde{m}_n=(m_1,...,m_{n-1}),\tilde{m}_{n-1}=(m_2,...,m_{n-1})$

البرهان

باستخدام الإحصاءات المرتبة المعممة المنتظمة ومن نظرية (3.1) نجد أن:

$$f^{U(r,n,\tilde{m}_n,k)}(u)=c_{r-1}\sum_{i=1}^{r} a_i(r)(1-u)^{\gamma_i-1}$$

$$=c_{r-1}\sum_{i=1}^{r} a_i(r+1)(\gamma_{r+1}-\gamma_i)(1-u)^{\gamma_i-1}$$

$$=c_{r-1}\sum_{i=1}^{r+1} a_i(r+1)(\gamma_{r+1}-\gamma_i)(1-u)^{\gamma_i-1}$$

حيث أن

$$a_i(r)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}\frac{1}{\gamma_j-\gamma_i}=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r+1}\frac{1}{\gamma_j-\gamma_i}(\gamma_{r+1}-\gamma_i)=a_i(r+1)(\gamma_{r+1}-\gamma_i),$$

$$a_i(r+1)(\gamma_{r+1}-\gamma_{r+1})=0$$

وعليه فإن

$$\gamma_{r+1}f^{U(r,n,\tilde{m}_n,k)}(u)+(\gamma_1-\gamma_{r+1})f^{U(r+1,n,\tilde{m}_n,k)}(u)$$

$$=\gamma_{r+1}c_{r-1}\sum_{i=1}^{r+1} a_i(r+1)(\gamma_{r+1}-\gamma_i)(1-u)^{\gamma_i-1}$$

$$+(\gamma_1-\gamma_{r+1})c_r\sum_{i=1}^{r+1} a_i(r+1)(1-u)^{\gamma_i-1}$$

$$=c_r\sum_{i=1}^{r+1} a_i(r+1)(\gamma_{r+1}-\gamma_i)(1-u)^{\gamma_i-1}$$

$$+(\gamma_1-\gamma_{r+1})c_r\sum_{i=1}^{r+1} a_i(r+1)(1-u)^{\gamma_i-1}$$

$$\gamma_{r+1}f^{U(r,n,\tilde{m}_n,k)}(u)+(\gamma_1-\gamma_{r+1})f^{U(r+1,n,\tilde{m}_n,k)}(u)$$

$$=c_r\sum_{i=1}^{r+1} a_i(r+1)(1-u)^{\gamma_i-1}[\gamma_1-\gamma_i]$$

$$=c_r\sum_{i=2}^{r+1} a_i(r+1)(\gamma_1-\gamma_i)(1-u)^{\gamma_i-1}$$

و من ناحية أخرى نلاحظ أن $1 \le i \le n-2, \tilde{\gamma}_i = \gamma_{i+1}$ ، حيث أن $\tilde{\gamma}_1,...,\tilde{\gamma}_{n-2}$ ، هي الثوابت المناظرة للإحصاء المرتب المعمم $U(r,n-1,\tilde{m}_{n-1},k)$، يعتمد على $n-1$ و $\tilde{m}_{n-1} = (m_2,...,m_{n-1})$، وبالتالي

$$\gamma_{r+1} f^{U(r,n,\tilde{m}_n,k)}(u) + (\gamma_1 - \gamma_{r+1}) f^{U(r+1,n,\tilde{m}_n,k)}$$
$$= \gamma_1 \prod_{j=2}^{r+1} \gamma_j \sum_{i=2}^{r+1} a_i(r+1)(\gamma_1 - \gamma_i)(1-u)^{\gamma_i - 1}$$
$$= \gamma_1 \prod_{j=1}^{r} \tilde{\gamma}_j \sum_{i=1}^{r} a_i(r)(1-u)^{\gamma_i - 1}$$
$$= \gamma_1 f^{U(r,n-1,\tilde{m}_{n-1},k)}(u)$$

حيث

$$a_i(r+1) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{r+1} \frac{1}{\gamma_j - \gamma_i} = \prod_{\substack{j=2 \\ j \ne i}}^{r+1} \frac{1}{\gamma_j - \gamma_i} \cdot \frac{1}{\gamma_1 - \gamma_i} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{r} \frac{1}{\tilde{\gamma}_j - \tilde{\gamma}_i} \cdot \frac{1}{\gamma_1 - \gamma_i}$$
$$= \frac{a_i(r)}{(\gamma_1 - \gamma_i)}$$

باستخدام التحويل في العلاقة (2.2) نحصل على المطلوب. □

ملاحظة (3.1)

1- يمكن وضع العلاقة التكرارية في تمهيدية (3.2)، على الصورة التالية

$$\gamma_{1,n}\left(f^{X(r,n,\tilde{m}_n,k)}(x) - f^{X(r,n-1,\tilde{m}_{n-1},k)}(x)\right)$$
$$= (\gamma_{1,n} - \gamma_{r+1,n})\left(f^{X(r,n,\tilde{m}_n,k)}(x) - f^{X(r+1,n,\tilde{m}_n,k)}(x)\right), \quad 1 \le r \le n$$

و ذلك مباشرة بإضافة $\pm \sum_{j=1}^{r} m_j$، للطرف الأيسر.

2- يمكن وضع تمهيدية (3.2)، في حدود لدوال التوزيع أو العزوم.

الفرق بين دالتي التوزيع لإحصاءين مرتبين معممين متعاقبين تعطى على الصورة:

$$F^{X(r,n,\tilde{m},k)}(x)-F^{X(r-1,n,\tilde{m},k)}(x)=-\frac{1}{\gamma_r}f^{X(r,n,\tilde{m},k)}(x)\frac{\overline{F}(x)}{f(x)},$$
$$f(x)\neq 0 \qquad (3.8)$$

يمكن الحصول عليها مباشرة من دالة التوزيع الهامشية في نظرية (3.1) على النحو التالي:

$$F^{X(r,n,\tilde{m},k)}(x)-F^{X(r-1,n,\tilde{m},k)}(x)$$
$$=c_{r-2}\sum_{i=1}^{r-1}\frac{a_i(r-1)}{\gamma_i}\left(\overline{F}(x)\right)^{\gamma_i}-c_{r-1}\sum_{i=1}^{r}\frac{a_i(r)}{\gamma_i}\left(\overline{F}(x)\right)^{\gamma_i}$$
$$F^{X(r,n,\tilde{m},k)}(x)-F^{X(r-1,n,\tilde{m},k)}(x)$$
$$=c_{r-2}\sum_{i=1}^{r}\frac{a_i(r)}{\gamma_i}(\gamma_r-\gamma_i)\left(\overline{F}(x)\right)^{\gamma_i}-\gamma_r c_{r-2}\sum_{i=1}^{r}\frac{a_i(r)}{\gamma_i}\left(\overline{F}(x)\right)^{\gamma_i}$$
$$=c_{r-2}\sum_{i=1}^{r}\frac{a_i(r)}{\gamma_i}\left(\overline{F}(x)\right)^{\gamma_i}(\gamma_r-\gamma_i-\gamma_r)$$
$$=-\frac{1}{\gamma_r}c_{r-1}f(x)\sum_{i=1}^{r}a_i(r)\left(\overline{F}(x)\right)^{\gamma_i-1}\frac{\overline{F}(x)}{f(x)}$$
$$=-\frac{1}{\gamma_r}f^{X(r,n,\tilde{m},k)}(x)\frac{\overline{F}(x)}{f(x)}$$

حصلنا على الفرق بين دالتي التوزيع لإحصاءين مرتبين معممين متعاقبين في حالة $m_1=...=m_{n-1}=m$ في الباب الثاني، (راجع بديهية (2.1) العلاقة (2.15)).

باستخدام العلاقة (3.8) في حالة التوزيع الأسي يمكن إيجاد علاقة تكرارية لعزوم الإحصاءات المرتبة المعممة.أي أنه بفرض أن $F\equiv\exp(\theta),\theta>0$ فإنه لأي $\alpha>0$ و $r\geq 2$

$$E\left(X^{\alpha}(r,n,\tilde{m},k)\right)-E\left(X^{\alpha}(r-1,n,\tilde{m},k)\right)$$
$$=\int_0^{\infty}x^{\alpha}\left(f^{X(r,n,\tilde{m},k)}(x)-f^{X(r-1,n,\tilde{m},k)}(x)\right)dx$$
$$=\int_0^{\infty}x^{\alpha}d\left(F^{X(r,n,\tilde{m},k)}(x)-F^{X(r-1,n,\tilde{m},k)}(x)\right)$$

باستخدام التكامل بالتجزيء نحصل على

$$E\left(X^{\alpha}(r,n,\tilde{m},k)\right)-E\left(X^{\alpha}(r-1,n,\tilde{m},k)\right)$$
$$=-\alpha\int_{0}^{\infty} x^{\alpha-1}\left(F^{X(r,n,\tilde{m},k)}(x)-F^{X(r-1,n,\tilde{m},k)}(x)\right)dx$$

حيث أن $x^{\alpha}\left(F^{X(r,n,\tilde{m},k)}(x)-F^{X(r-1,n,\tilde{m},k)}(x)\right)\Big|_{0}^{\infty}=0$

$$E\left(X^{\alpha}(r,n,\tilde{m},k)\right)-E\left(X^{\alpha}(r-1,n,\tilde{m},k)\right)=\frac{\alpha}{\gamma_r}\int_{0}^{\infty} x^{\alpha-1} f^{X(r,n,\tilde{m},k)}(x)\frac{\bar{F}(x)}{f(x)}dx$$

وحيث أن $F\equiv\exp(\theta),\theta>0$ فإن العلاقة $\frac{f(x)}{\theta}=1-F(x)$ تكون محققة و

بالتالي فإن:

$$E\left(X^{\alpha}(r,n,\tilde{m},k)\right)-E\left(X^{\alpha}(r-1,n,\tilde{m},k)\right)=\frac{\alpha}{\theta\gamma_r}\int_{0}^{\infty} x^{\alpha-1} f^{X(r,n,\tilde{m},k)}(x)dx$$
$$=\frac{\alpha}{\theta\gamma_r}E\left(X^{\alpha-1}(r,n,\tilde{m},k)\right)$$

هذه العلاقة مفيدة في حالة نموذج الإحصاءات المرتبة المراقبة من النوع الثاني المرتبطة بالتوزيع الأسي و التوزيع الأسي المقطوع.

(3.3) عزوم الإحصاءات المرتبة المعممة من توزيعات خاصة

Moments of Generalized Order Statistics for Specific Distribution

يمكن الحصول على الصور الصريح لعزوم الإحصاءات المرتبة المعممة من عدة توزيعات منها:

1- توزيع دالة القوى Power function distribution

2- توزيع باريتو Pareto distribution

3- توزيع وايبيل Weibull distribution

و الجدير بالذكر أن علاقات هذا الفصل موجودة في (Kamps and Cramer 2001) كنتائج وقمنا بحسابها بشيء من التفصيل و حساب جداول للإحصاءات المرتبة العادية و الإحصاءا ت المرتبة المتعاقبة و تسجيلات Pfeifer كحالات خاصة.

(3.3.1) توزيع دالة القوى Power function distribution

من العلاقة (2.17) نجد أن:

$$E\left(X^{\alpha}(r,n,\tilde{m},k)\right)=c_{r-1}c^{-\alpha/a}\sum_{i=1}^{r}a_i(r)\int_0^1 t^{\alpha/a}(1-t)^{\gamma_i-1}dt$$

$$=c_{r-1}c^{-\alpha/a}\sum_{i=1}^{r}a_i(r)B(\alpha/a+1,\gamma_i)$$

$$E\left(X^{\alpha}(r,n,\tilde{m},k)\right)=c_{r-1}c^{-\alpha/a}\Gamma(\alpha/a+1)\sum_{i=1}^{r}a_i(r)\frac{\Gamma(\gamma_i)}{\Gamma(\alpha/a+\gamma_i+1)}$$

حالات خاصة:

1- الإحصاءات المرتبة العادية

جدول (3-1) العزوم للإحصاءات المرتبة العادية من توزيع دالة القوى $(\gamma_r = n-r+1)$

$(c=4, a=3, \alpha=6)$

n	r					
	1	2	3	4	5	6
2	0.01042	0.03125	***	***	***	***
3	0.006250	0.01875	0.03750	***	***	***
4	0.004167	0.008929	0.02500	0.04167	***	***
5	0.002976	0.008929	0.01786	0.02976	0.04464	***
6	0.002232	0.006696	0.01339	0.02232	0.03348	0.04688

جدول (3-2) العزوم للإحصاءات المرتبة العادية من توزيع دالة القوى $(\gamma_r = n-r+1)$

.$(c=2, a=3, \alpha=1)$

n	r					
	1	2	3	4	5	6
2	0.5102	0.6803	***	***	***	***
3	0.4592	0.6123	0.7143	***	***	***
4	0.4239	0.5652	0.6594	0.7326	***	***
5	0.3974	0.5299	0.6182	0.6869	0.7441	***
6	0.3765	0.5020	0.5856	0.6507	0.7049	0.7519

نلاحظ أنها نفس النتيجة التي حصلنا عليها في الباب الثاني جدول (2.3)

2 - الإحصاءات المرتبة المتعاقبة

جدول (3-3) العزوم للإحصاءات المرتبة المتعاقبة من توزيع دالة القوى $(\gamma_r = 2(n-r)+1)$

$(c = 2, a = 3, \alpha = 1)$

n	r					
	1	2	3	4	5	6
2	0.4592	0.6633	***	***	***	***
3	0.3974	0.5519	0.6911	***	***	***
4	0.3594	0.4925	0.5965	0.7069	***	***
5	0.3327	0.4528	0.5420	0.6238	0.7173	***
6	0.3125	0.4236	0.5040	0.5738	0.6425	0.7248

جدول (3-4) العزوم للإحصاءات المرتبة المتعاقبة من توزيع دالة القوى $(\gamma_r = 2(n-r)+1)$

$(c = 3, a = 4, \alpha = 5)$

n	r					
	1	2	3	4	5	6
2	0.04890	0.1444	***	***	***	***
3	0.02980	0.07754	0.1611	***	***	***
4	0.02093	0.05199	0.09670	0.1719	***	***
5	0.01589	0.03855	0.06880	0.1106	0.1795	***
6	0.01269	0.03033	0.05295	0.08200	0.1214	0.1853

3 – تسجيلات Pfeifer:

جدول (3-5) العزوم لتسجيلات Pfeifer من توزيع دالة القوى $(\gamma_r = (n-r+1)/n)$

$(c = 2, a = 3, \alpha = 1)$

n	r					
	1	2	3	4	5	6
2	0.5953	0.7402	***	***	***	***
3	0.5953	0.7289	0.7791	***	***	***
4	0.5953	0.7240	0.7726	0.7897	***	***
5	0.5953	0.7213	0.7690	0.7870	0.7926	***
6	0.5953	0.7195	0.7667	0.7852	0.7916	0.7934

جدول (3-6) العزوم لتسجيلات Pfeifer من توزيع دالة القوى $(\gamma_r = (n-r+1)/n)$

$(c = 3, a = 4, \alpha = 5)$

n	r					
	1	2	3	4	5	6
2	0.1126	0.2037	***	***	***	***
3	0.1126	0.1939	0.2380	***	***	***
4	0.1126	0.1898	0.2315	0.2488	***	***
5	0.1126	0.1875	0.2279	0.2459	0.2520	***
6	0.1126	0.1860	0.2256	0.2439	0.2509	0.2529

(3.3.2) توزيع باريتو Pareto distribution

من العلاقة (2.18)

فإن:

$$E\left(X^{\alpha}(r,n,\tilde{m},k)\right)=c_{r-1}c^{\alpha/a}\sum_{i=1}^{r}a_i(r)\int_{0}^{1}(1-t)^{\gamma_i-\alpha/a-1}dt$$

$$=-c_{r-1}c^{\alpha/a}\sum_{i=1}^{r}a_i(r)\frac{(1-t)^{\gamma_i-\alpha/a}}{\gamma_i-\alpha/a}\Bigg|_0^1$$

$$E\left(X^{\alpha}(r,n,\tilde{m},k)\right)=c_{r-1}c^{\alpha/a}\sum_{i=1}^{r}\frac{a_i(r)}{\gamma_i-\alpha/a}$$

$$=c_{r-1}c^{\alpha/a}\sum_{i=1}^{r}\frac{a_i(r)}{\gamma_i^{*}}$$

$$=c^{\alpha/a}\frac{c_{r-1}(k)}{c_{r-1}(k-\alpha/a)}$$

حيث أن $(\gamma_i-\alpha/a)=\gamma_i^{*}$ و $c_{r-1}(k-\alpha/a)\sum_{i=1}^{r}\frac{a_i(r)}{\gamma_i^{*}}=1$

حالات خاصة:

1- الإحصاءات المرتبة العادية

جدول (3-7) العزوم للإحصاءات المرتبة العادية من توزيع باريتو $(\gamma_r=n-r+1)$

$(c=3, a=5, \alpha=4)$

n	r					
	1	2	3	4	5	6
2	4.014	20.07	***	***	***	***
3	3.284	5.473	27.37	***	***	***
4	3.010	4.105	6.842	34.21	***	***
5	2.867	3.584	4.887	8.145	40.72	***
6	2.779	3.308	4.135	5.639	9.398	46.99

جدول (3-8) العزوم للإحصاءات المرتبة العادية من توزيع باريتو $(\gamma_r = n-r+1)$

$(c=2, a=3, \alpha=1)$

n	r					
	1	2	3	4	5	6
2	1.512	2.268	***	***	***	***
3	1.417	1.701	2.551	***	***	***
4	1.374	1.546	1.856	2.783	***	***
5	1.350	1.473	1.657	1.988	2.982	***
6	1.334	1.429	1.559	1.754	2.105	3.158

نلاحظ أنها نفس النتيجة التي حصلنا عليها في الباب الثاني جدول (2.7)

2 - الإحصاءات المرتبة المتعاقبة

جدول (3-9) العزوم للإحصاءات المرتبة المتعاقبة من توزيع باريتو $(\gamma_r = 2(n-r)+1)$

$(c=2, a=3, \alpha=1)$

n	r					
	1	2	3	4	5	6
2	1.417	2.126	***	***	***	***
3	1.350	1.519	2.278	***	***	***
4	1.323	1.417	1.595	2.392	***	***
5	1.308	1.374	1.472	1.656	2.484	***
6	1.299	1.349	1.417	1.518	1.708	2.561

جدول (3-10) العزوم للإحصاءات المرتبة المتعاقبة من توزيع باريتو $(\gamma_r = 2(n-r)+1)$

$(c=3, a=5, \alpha=4)$

n	r					
	1	2	3	4	5	6
2	3.284	16.42	***	***	***	***
3	2.867	3.909	19.55	***	***	***
4	2.719	3.237	4.414	22.07	***	***
5	2.643	2.984	3.553	4.845	24.22	***
6	2.597	2.850	3.218	3.831	5.224	26.12

(3.3.3) توزيع وايبل Weibull distribution

من العلاقة (2.19)

$$E\left(X^{\alpha}(r,n,\tilde{m},k)\right)=c_{r-1}c^{-\alpha/a}\sum_{i=1}^{r}a_i(r)\int_0^1 \left(-\ln(1-t)\right)^{\alpha/a}(1-t)^{\gamma_i-1}dt$$

$$E\left(X^{\alpha}(r,n,\tilde{m},k)\right)=c_{r-1}c^{-\alpha/a}\sum_{i=1}^{r}a_i(r)\int_{0}^{\infty} s^{\alpha/a}e^{-\gamma_i s}ds$$

$$=c_{r-1}c^{-\alpha/a}\Gamma(\alpha/a+1)\sum_{i=1}^{r}\frac{a_i(r)}{(\gamma_i)^{\alpha/a+1}}$$

حالات خاصة:

1- الإحصاءات المرتبة العادية

جدول (3-11) العزوم للإحصاءات المرتبة العادية من توزيع وايبل$(\gamma_r = n-r+1)$

$(c=2, a=3, \alpha=1)$

n	r					
	1	2	3	4	5	6
2	0.5625	0.8550	***	***	***	***
3	0.4914	0.7048	0.9301	***	***	***
4	0.4465	0.6262	0.7833	0.9790	***	***
5	0.4145	0.5745	0.7038	0.8363	1.015	***
6	0.3900	0.5367	0.6502	0.7575	0.8757	1.042

نلاحظ أنها نفس النتيجة التي حصلنا عليها في الباب الثاني جدول (2.10).

جدول (3-12) العزوم للإحصاءات المرتبة العادية من توزيع وايبل$(\gamma_r = n-r+1)$

$(c=3, a=4, \alpha=5)$

n	r					
	1	2	3	4	5	6
2	0.1207	0.4533	***	***	***	***
3	0.07268	0.2166	0.5716	***	***	***
4	0.05073	0.1385	0.2947	0.6639	***	***
5	0.03838	0.1001	0.1962	0.3603	0.7398	***
6	0.03056	0.07749	0.1454	0.2470	0.4170	0.8044

2 - الإحصاءات المرتبة المتعاقبة

جدول (3-13) العزوم للإحصاءات المرتبة المتعاقبة من توزيع وايبل$(\gamma_r = 2(n-r)+1)$

$(c = 2, a = 3, \alpha = 1)$

n	r					
	1	2	3	4	5	6
2	0.4914	0.8174	***	***	***	***
3	0.4145	0.6068	0.8701	***	***	***
4	0.3705	0.5244	0.6686	0.9036	***	***
5	0.3407	0.4747	0.5866	0.7097	0.9279	***
6	0.3187	0.4399	0.5356	0.6290	0.7399	0.9467

جدول (3-14) العزوم للإحصاءات المرتبة المتعاقبة من توزيع وايبل$(\gamma_r = 2(n-r)+1)$

$(c = 3, a = 4, \alpha = 5)$

n	r					
	1	2	3	4	5	6
2	0.07268	0.3941	***	***	***	***
3	0.03838	0.1241	0.4616	***	***	***
4	0.02520	0.07133	0.1637	0.5112	***	***
5	0.01841	0.04898	0.09925	0.1960	0.5507	***
6	0.01432	0.03679	0.07033	0.1234	0.2232	0.5834

3 – تسجيلات Pfeifer

جدول (3-15) العزوم لتسجيلات Pfeifer من توزيع وايبل$(\gamma_r = (n-r+1)/n)$

$(c = 2, a = 3, \alpha = 1)$

n	r					
	1	2	3	4	5	6
2	0.7088	1.077	***	***	***	***
3	0.7088	1.016	1.341	***	***	***
4	0.7088	0.9941	1.243	1.554	***	***
5	0.7088	0.9824	1.204	1.430	1.735	***
6	0.7088	0.9752	1.181	1.376	1.591	1.894

جدول (3-16) العزوم لتسجيلات Pfeifer من توزيع وايبيل($\gamma_r = (n-r+1)/n$)

($c = 3, a = 4, \alpha = 5$)

n	r					
	1	2	3	4	5	6
2	0.2870	1.078	***	***	***	***
3	0.2870	0.8552	2.257	***	***	***
4	0.2870	0.7837	1.667	3.756	***	***
5	0.2870	0.7486	1.467	2.694	5.532	***
6	0.2870	0.7277	1.365	2.319	3.916	7.554

التعليق على النتائج:

نلاحظ من النتائج التي حصلنا عليها من الجداول السابقة ما يلي:

(i)-الإحصاءات المرتبة العادية:

- كلما كبر حجم العينة n،قلت قيمة العزوم، (تؤول إلى الصفر).
- كلما كبرت رتبة الإحصاء المرتب r ، كبرت قيمة العزوم.
- كلما كبرت رتبة العزم α، قلت قيمته.

(ii) الإحصاءات المرتبة المتعاقبة.

- كلما كبر حجم العينة n،قلت قيمة العزوم، (تؤول إلى الصفر).
- كلما كبرت رتبة الإحصاء المرتب r ، كبرت قيمة العزوم.
- كلما كبرت رتبة العزم α، قلت قيمته.

(iii)-تسجيلات pfeifer

- قيمة العزم للتسجيل الأول لا تعتمد على حجم العينة n،و تساوي قيمة العزم للقيمة المسجلة العادية.

الْبَابُ الرَّابِعُ

الإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة

Dual Generalized Order Statistic

الباب الرابع

الإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة

Dual Generalized Order Statistics

مقدمة

يعتبر نموذج الإحصاءات المرتبة المعممة السابق ذكره في البابين الثاني و الثالث غير ملائم لدراسة المتغيرات العشوائية المرتبة ترتيباً تنازلياً (decreasingly ordered) و التي منها على سبيل المثال القيم المسجلة السفلى (الدنيا) (lower record values). وبالتالي لابد أن يكون هنالك نموذج معمم آخر يتضمن مثل هذه المتغيرات العشوائية المرتبة، يعرف بالإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة ((Dual generalized order statistics(dgos). في الفصل الأول من هذا الباب سوف نوضح مفهوم الإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة. ، كما س نقوم بدراسة نظرية التوزيع للإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة في حالة $m_1 = ... = m_{n-1} = m$ و في الحالة العامة. و يحتوي الفصل الثاني على إيجاد العلاقات التكرارية لدوال الكثافة الهامشية و المشتركة للإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة من النوع m و العزوم المفردة و المختلطة و العلاقات التكرارية بين العزوم، و يشتمل الفصل الثالث على إيجاد العزوم للإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة من توزيع القيمة المتطرفة المعممة، ومنها نوجد العزوم للإحصاءات المرتبة العادية و المتعاقبة و تسجيلات Pfeifer و عمل جداول للحالات الخاصة. الفصل الرابع سنقوم بذكر علاقات للربط بين نموذج الإحصاءات المرتبة المعممة و الإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة، مع ذكر مثال لتوضيح هذه العلاقات.

ومن المراجع الأساسية **Burkschat, Cramer and Kamps(2003)** ، و **Ahsanullah (2004)**

(4.1) نظرية التوزيع للإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة

Distribution Theory of Dual Generalized Order Statistics

تعريف (4.1) (Burkschat, Cramer and Kamps 2003)

بفرض أن الثوابت $\gamma_1,...,\gamma_n > 0$ كما في تعريف (2.1)، فإن المتغيرات العشوائية

$U_d(1,n,\tilde{m},k),...,U_d(n,n,\tilde{m},k)$ تعرف بالإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة المنتظمة، إذا كانت لها دالة الكثافة المشتركة التي تعطى بالصورة:

$$f^{U_d(1,n,\tilde{m},k),...,U_d(n,n,\tilde{m},k)}(u_1,...,u_n)=\left(\prod_{j=1}^{n}\gamma_j\right)\left(\prod_{j=1}^{n-1}u_j^{\gamma_j-\gamma_{j+1}-1}\right)u_n^{\gamma_n-1}, \quad (4.1)$$

داخل المخروط $R^n \supset \{(u_1,...,u_n):1\geq u_1\geq...\geq u_n>0\}$.

باستخدام التحويل

$$X_d(r,n,\tilde{m},k)=F^{-1}(U_d(r,n,\tilde{m},k)), \quad 1\leq r\leq n, \qquad (4.2)$$

نحصل على الإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة على أساس دالة توزيع اختيارية F. وتكون دالة الكثافة المشتركة لها على الصورة

$$f^{X_d(1,n,\tilde{m},k),...,X_d(n,n,\tilde{m},k)}(x_1,...,x_n)=\left(\prod_{j=1}^{n}\gamma_j\right)\left(\prod_{j=1}^{n-1}(F(x_j))^{\gamma_j-\gamma_{j+1}-1}f(x_j)\right)$$

$$\times(F(x_n))^{\gamma_n-1}f(x_n), \qquad (4.3)$$

على المخروط $R^n \supset \{(x_1,...,x_n):F^{-1}(1)\geq x_1\geq...\geq x_n>F^{-1}(0)\}$، وبالتالي فإنها تحقق $X_d(1,n,\tilde{m},k)\geq...\geq X_d(n,n,\tilde{m},k)$. وكما أن نموذج الإحصاءات المرتبة المعممة يتضمن عدة نماذج من المتغيرات العشوائية المرتبة ترتيباً تصاعدياً، كذلك الإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة تحوي عدة نماذج من المتغيرات العشوائية المرتبة ترتيباً تناقصياً ، والتي منها القيم المسجلة السفلى (الدنيا) (lower record values).

الآن بفرض أن $1\leq j\leq n, B_j$ متغيرات عشوائية مستقلة من توزيع بيتا في حالة خاصة (respective Beta distribution)، $Beta(\gamma_j,1)$. أي أن B_j تتبع توزيع دالة القوي بالمعلمة γ_j. وباستخدام خاصية ماركوف للمتغيرات العشوائية

$W_r=\prod_{j=1}^{r}B_j$ ،$1\leq r\leq n$، فإن $(U_d(r,n,\tilde{m},k))_{1\leq r\leq n}\sim(W_r)_{1\leq r\leq n}$ وعليه فإن العلاقة (4.2) تؤدي إلى $(X_d(r,n,\tilde{m},k))_{1\leq r\leq n}\sim(F^{-1}(W_r))_{1\leq r\leq n}$، حيث أن $X\sim Y$ تعني أن X,Y لهما نفس التوزيع.

وهذا يوصل إلى نتائج نظرية التوزيع المركزية بالنسبة للإحصاءات المرتبة المعممة. أي أن:

$$\left(X(r,n,\tilde{m},k)\right)_{1\le r\le n} \sim \left(F^{-1}(1-W_r)\right)_{1\le r\le n} \sim \left(F^{-1}\left(1-\prod_{j=1}^{r} B_j\right)\right)_{1\le r\le n}$$

وقد برهنها ((Cramer and Kamps (2003).كما أثبت الباحثان أن دالة التوزيع التراكمية للمتغير W_r يمكن كتابتها باستخدام الدالة الخاصة , (Meijer`s G-function)، وعليه فإن دالة التوزيع التراكمية للإحصاء المرتب المعمم المرافق $X_d(r)$ تعطى على الصورة:

$$F^{X_d(r,n,\tilde{m},k)}(x)=\left(\prod_{j=1}^{r}\gamma_j\right)\int_0^{F(x)} G_{r,r}^{r,0}\left[y\,\middle|\,\begin{matrix}\gamma_1,\ldots,\gamma_r\\ \gamma_1-1,\ldots,\gamma_r-1\end{matrix}\right]dy,\quad x\in R$$

حيث أن $|z|<1$

$$G_{r,r}^{r,0}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}\gamma_1,\ldots,\gamma_r\\ \gamma_1-1,\ldots,\gamma_r-1\end{matrix}\right]=\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{z^t}{\prod_{j=1}^{r}(\gamma_j-1-t)}\,dz,\ |z|<1$$

لمعرفة المزيد عن الدالة (Meijer`s G-function) راجع ملحق الرسالة.

ونجد أن دالة التوزيع للإحصاء المرتب المعمم الرائي تعطى على الصورة:

$$F^{X(r,n,\tilde{m},k)}(x)=1-\left(\prod_{j=1}^{r}\gamma_j\right)\int_0^{\bar{F}(x)} G_{r,r}^{r,0}\left[y\,\middle|\,\begin{matrix}\gamma_1,\ldots,\gamma_r\\ \gamma_1-1,\ldots,\gamma_r-1\end{matrix}\right]dy,\quad x\in R$$

بديهية (4.1) (Burkschat, Cramer and Kamps 2003)

بفرض أن $F_s^{(\gamma_1,\ldots,\gamma_s)}$ هي دالة التوزيع التراكمية للإحصاء المرتب المعمم من الرتبة s على أساس المعالم $\gamma_1,\ldots,\gamma_s$ فإن العلاقة التالية تكون محققة:

$$(\gamma_r-\gamma_1)F_r^{(\gamma_1,\ldots,\gamma_r)}(x)=\gamma_r F_{r-1}^{(\gamma_1,\ldots,\gamma_{r-1})}(x)-\gamma_1 F_{r-1}^{(\gamma_2,\ldots,\gamma_r)}(x),\ x\in R, \quad (4.4)$$

البرهان:

باستخدام المتطابقة لقيم $z\in(0,1)$

$$(\gamma_r-\gamma_1)G_{r,r}^{r,0}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}\gamma_1,\ldots,\gamma_r\\ \gamma_1-1,\ldots,\gamma_r-1\end{matrix}\right]=G_{r-1,r-1}^{r-1,0}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}\gamma_1,\ldots,\gamma_{r-1}\\ \gamma_1-1,\ldots,\gamma_{r-1}-1\end{matrix}\right]$$
$$-G_{r-1,r-1}^{r-1,0}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}\gamma_2,\ldots,\gamma_r\\ \gamma_2-1,\ldots,\gamma_r-1\end{matrix}\right]$$

راجع الملحق.

$$(\gamma_r-\gamma_1)\left(\prod_{j=1}^{r}\gamma_j\right)\int_0^{\bar{F}(x)} G_{r,r}^{r,0}\left[z\middle|\begin{matrix}\gamma_1,\dots,\gamma_r\\ \gamma_1-1,\dots,\gamma_r-1\end{matrix}\right]dz$$

$$=\gamma_r\left(\prod_{j=1}^{r-1}\gamma_j\right)\int_0^{\bar{F}(x)} G_{r-1,r-1}^{r-1,0}\left[z\middle|\begin{matrix}\gamma_1,\dots,\gamma_{r-1}\\ \gamma_1-1,\dots,\gamma_{r-1}-1\end{matrix}\right]dz$$

$$-\gamma_1\left(\prod_{j=2}^{r}\gamma_j\right)\int_0^{\bar{F}(x)} G_{r-1,r-1}^{r-1,0}\left[z\middle|\begin{matrix}\gamma_2,\dots,\gamma_r\\ \gamma_2-1,\dots,\gamma_r-1\end{matrix}\right]dz$$

$$(\gamma_r-\gamma_1)\left(1-F_r^{(\gamma_1,\dots,\gamma_r)}(x)\right)$$

$$=\gamma_r\left(1-F_{r-1}^{(\gamma_1,\dots,\gamma_{r-1})}(x)\right)-\gamma_1\left(1-F_{r-1}^{(\gamma_2,\dots,\gamma_r)}(x)\right)$$

$$(\gamma_r-\gamma_1)-(\gamma_r-\gamma_1)F_r^{(\gamma_1,\dots,\gamma_r)}(x)$$

$$=\gamma_r-\gamma_r F_{r-1}^{(\gamma_1,\dots,\gamma_{r-1})}(x)-\gamma_1+\gamma_1F_{r-1}^{(\gamma_2,\dots,\gamma_r)}(x)$$

$$(\gamma_r-\gamma_1)F_r^{(\gamma_1,\dots,\gamma_r)}(x)=\gamma_rF_{r-1}^{(\gamma_1,\dots,\gamma_{r-1})}(x)-\gamma_1F_{r-1}^{(\gamma_2,\dots,\gamma_r)}(x)$$

□

العلاقة (4.4) صحيحة في حالة استبدال دالة التوزيع للإحصاء المرتب المعمم بدالة التوزيع للإحصاء المرتب المعمم المرافق المناظرة. كما أنه يمكن الحصول منها على متطابقات للعزوم.

نظرية (4.1)

دالة الكثافة المشتركة لأول r من الإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة المنتظمة

$U_d(1,n,\tilde{m},k),\dots,U_d(r,n,\tilde{m},k)$, $r\in\{1,\dots,n\}$, تعطى على الصورة:

$$f^{U_d(1,n,\tilde{m},k),\dots,U_d(r,n,\tilde{m},k)}(u_1,\dots,u_r)=C_{r-1}\left(\prod_{j=1}^{r-1}u_j^{\,m_j}\right)u_r^{\gamma_r-1},$$

$$1\ge u_1\ge\dots\ge u_r>0 \quad (4.5)$$

البرهان

باستخدام دالة الكثافة المشتركة في العلاقة (4.1)

$$f^{U_d(1,n,\tilde{m},k),\dots,U_d(r,n,\tilde{m},k)}(u_1,\dots,u_r)=$$

$$\int_0^{u_r}\dots\int_0^{u_{n-1}} f^{U_d(1,n,\tilde{m},k),\dots,U_d(n,n,\tilde{m},k)}(u_1,\dots,u_n)\,du_n\dots du_{r+1},\quad(4.6)$$

وباستخدام الاستنتاج الرياضي مبتدئين بوضع $r=n-1$

$$f^{U_d(1,n,\tilde{m},k),\ldots,U_d(n-1,n,\tilde{m},k)}(u_1,\ldots,u_{n-1}) = C_{n-1}\int_0^{u_{n-1}}\prod_{j=1}^{n-1} u_j^{m_j}\cdot u_n^{\gamma_n-1}du_n$$

$$= C_{n-1}\prod_{j=1}^{n-1} u_j^{m_j}\int_0^{u_{n-1}} u_n^{\gamma_n-1}du_n$$

$$= C_{n-2}\prod_{j=1}^{n-1} u_j^{m_j}u_{n-1}^{\gamma_n}$$

$$f^{U_d(1,n,\tilde{m},k),\ldots,U_d(n-1,n,\tilde{m},k)}(u_1,\ldots,u_{n-1}) = C_{n-2}\prod_{j=1}^{n-2} u_j^{m_j}u_{n-1}^{m_{n-1}+\gamma_n}$$

$$= C_{n-2}\prod_{j=1}^{n-2} u_j^{m_j}u_{n-1}^{\gamma_{n-1}-1}$$

حيث أن $\gamma_n + m_{n-1} = \gamma_{n-1} - 1$.

و بفرض أن العلاقة (4.6) صحيحة، نثبت صحة العلاقة عند استبدال r بـــ $r-1$

$$f^{U_d(1,n,\tilde{m},k),\ldots,U_d(r-1,n,\tilde{m},k)}(u_1,\ldots,u_{r-1})$$

$$= \int_0^{u_{r-1}}\int_0^{u_r}\ldots\int_0^{u_{n-1}} f^{U_d(1,n,\tilde{m},k),\ldots,U_d(n,n,\tilde{m},k)}(u_1,\ldots,u_n)du_n\ldots du_{r+1}du$$

$$= \prod_{j=1}^{n}\gamma_j\int_0^{u_{r-1}}\int_0^{u_r}\ldots\int_0^{u_{n-1}}\left(\prod_{j=1}^{n-1} u_j^{m_j}\right)u_n^{\gamma_n-1}du_n\ldots du_{r+1}du_r$$

$$= \prod_{j=1}^{n}\gamma_j\int_0^{u_{r-1}}\int_0^{u_r}\ldots\int_0^{u_{n-2}}\left(\prod_{j=1}^{n-1} u_j^{m_j}\right)\frac{u_n^{\gamma_n}}{\gamma_n}\Bigg|_0^{u_{n-1}}du_{n-1}\ldots du_{r+1}du_r$$

$$= \prod_{j=1}^{n-1}\gamma_j\int_0^{u_{r-1}}\int_0^{u_r}\ldots\int_0^{u_{n-2}}\left(\prod_{j=1}^{n-2} u_j^{m_j}\right)(u_{n-1})^{\gamma_n+m_{n-1}}du_{n-1}\ldots du_{r+1}du_r$$

$$= \prod_{j=1}^{n-1}\gamma_j\int_0^{u_{r-1}}\int_0^{u_r}\ldots\int_0^{u_{n-2}}\left(\prod_{j=1}^{n-2} u_j^{m_j}\right)(u_{n-1})^{\gamma_{n-1}-1}du_{n-1}\ldots du_{r+1}du_r$$

$$= \prod_{j=1}^{n-1}\gamma_j\int_0^{u_{r-1}}\int_0^{u_r}\ldots\int_0^{u_{n-3}}\left(\prod_{j=1}^{n-2} u_j^{m_j}\right)\frac{(u_{n-1})^{\gamma_{n-1}}}{\gamma_{n-1}}\Bigg|_0^{u_{n-2}}du_{n-2}\ldots du_{r+1}du_r$$

$$= \prod_{j=1}^{n-2}\gamma_j\int_0^{u_{r-1}}\int_0^{u_r}\ldots\int_0^{u_{n-3}}\left(\prod_{j=1}^{n-3} u_j^{m_j}\right)(u_{n-2})^{\gamma_{n-2}-1}du_{n-2}\ldots du_{r+1}du_r$$

$$= \prod_{j=1}^{r-1}\gamma_j\int_0^{u_{r-1}}\left(\prod_{j=1}^{r-1} u_j^{m_j}\right)u_r^{\gamma_r-1}du_r$$

$$f^{U_d(1,n,\tilde{m},k),\ldots,U_d(r-1,n,\tilde{m},k)}(u_1,\ldots,u_{r-1}) = C_{r-2}\left(\prod_{j=1}^{r-1} u_j^{m_j}\right)u_{r-1}^{\gamma_r}$$

$$= C_{r-2}\left(\prod_{j=1}^{r-2} u_j^{m_j}\right)u_{r-1}^{\gamma_{r-1}-1}$$

إذن العلاقة (4.5) صحيحة لكل $r = 1,\ldots,n-1$.

□

وحيث أن الإحصاءات المرتبة المعممة على أساس دالة توزيع متصلة، تحقق خاصية ماركوف. فإننا نتوقع أيضا تكون محققة بالنسبة للإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة. وفي الواقع فإنه يمكن تمييز الإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة على أساس دالة توزيع متصلة بنفس الطريقة باستخدام الاحتمالات الانتقالية لسلسلة ماركوف الخاصة.

نظرية (4.2)

بفرض أن F دالة توزيع تراكمية متصلة، فإن المتغيرات العشوائية $X_d(1,n,\tilde{m},k),\ldots,X_d(n,n,\tilde{m},k)$ تكون هي الإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة على أساس دالة التوزيع F إذا و إذا فقط أمكن صياغتها على صورة سلسلة ماركوف بدالة توزيع ابتدائية $P\left(X_d(1,n,\tilde{m},k) \le x\right) = \left(F(x)\right)^{\gamma_1}, x \in R$ و الاحتمالات الانتقالية التالية:

$$P\left(X_d(r,n,\tilde{m},k) \le s \middle| X_d(r-1,n,\tilde{m},k) = t\right) = \left(\frac{F(s)}{F(t)}\right)^{\gamma_r},$$

$$F(0)^{-1} < s < t < F(1)^{-1}$$

البرهان

نفرض أن $X_d(1,n,\tilde{m},k),\ldots,X_d(n,n,\tilde{m},k)$ هي الإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة على أساس دالة التوزيع F وسنعرف دالة المتغيرات العشوائية بطريقة تتابعية (recursive)

$$Z_1 = F^{-1}(B_1),\ Z_{r+1} = F^{-1}(B_{r+1}F(Z_r)), \qquad 1 \le r \le n-1$$

فإن خاصية ماركوف للإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة تنتج مباشرة من

$\left(X_d(r,n,\tilde{m},k)\right)_{1\le r\le n} \sim \left(Z_r\right)_{1\le r\le n}$. و من دالة التوزيع للإحصاء

$X_d(1,n,\tilde{m},k)$ المعطاة نجد أن

$$P\left(X_d(1,n,\tilde{m},k)\le x\right)=P\left(Z_1\le x\right)=P\left(F^{-1}(B_1)\le x\right)=P\left(B_1\le F(x)\right)$$

$$=\left(F(x)\right)^{\gamma_1}$$

و بالتالي فإن

$$P\left(X_d(r,n,\tilde{m},k)\le s\mid X_d(r-1,n,\tilde{m},k)=t\right)=P\left(Z_r\le s\mid Z_{r-1}=t\right)$$

$$=P\left(F^{-1}(B_rF(Z_{r-1}))\le s\mid Z_{r-1}=t\right)$$

$$P\left(X_d(r,n,\tilde{m},k)\le s\mid X_d(r-1,n,\tilde{m},k)=t\right)$$

$$=P\left(B_rF(Z_{r-1})\le F(s)\mid F(Z_{r-1})=F(t)\right)$$

$$=P\left(\frac{B_rF(Z_{r-1})}{F(t)}\le\frac{F(s)}{F(t)}\right)$$

$$P\left(X_d(r,n,\tilde{m},k)\le s\mid X_d(r-1,n,\tilde{m},k)=t\right)=P\left(B_r\le\frac{F(s)}{F(t)}\right)=\left[\frac{F(s)}{F(t)}\right]^{\gamma_r}$$

حيث $F^{-1}(0)<s<t<F^{-1}(1)$

ويتحقق الاتجاه المعاكس من كون دالة التوزيع المشتركة لمتغيرات عشوائية تحقق خاصية ماركوف تكون وحيدة ومحددة بالتوزيع الابتدائي و الاحتمالات الانتقالية. □

الخاصية السابقة يمكن أن تكون أداة مفيدة لإثبات أن عدة نماذج من المتغيرات العشوائية المرتبة التناقصية تكون محتواه داخل نموذج الإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة.

سنعرف الدوال h_m و g_m حيث $m\in R$ كما يلي:

$$h_m=\begin{cases}\dfrac{x^{m+1}}{m+1}, & m\ne -1\\ \ln x\ , & m=-1\end{cases}\qquad x\in(0,1]$$

$$g_m\ =h_m(1)-h_m(x)\ =\begin{cases}\dfrac{1-x^{m+1}}{m+1}, & m\ne -1\\ -\ln x\ , & m=-1\end{cases}\qquad x\in(0,1]$$

قبل إيجاد دالة الكثافة الهامشية للإحصاء المرتب المعمم الرائي، نحتاج لإثبات التمهيدية التالية.

تمهيدية (4.1)

إذا كانت r, j أعداداً صحيحة موجبة تحقق $r > j$ و كان:

$$A_j = \int_{u_r}^{u_{r-j-1}} \cdots \int_{u_r}^{u_{r-2}} \prod_{i=1}^{r-1} h'_m(u_i) du_{r-1} \ldots du_{r-j}$$

فإن:

$$A_j = \frac{1}{(j)!} \prod_{i=1}^{r-j-1} h'_m(u_i) \left[h_m(u_{r-j-1}) - h_m(u_r) \right]^j, \quad j = 1,2,\ldots,r-1 \qquad (4.7)$$

البرهان

حيث أن

$$A_j = \int_{u_r}^{u_{r-j-1}} \cdots \int_{u_r}^{u_{r-2}} \prod_{i=1}^{r-1} h'_m(u_i) du_{r-1} \ldots du_{r-j},$$

فإن:

$$A_j = \int_{u_r}^{u_{r-j-1}} \cdots \int_{u_r}^{u_{r-2}} \prod_{i=1}^{r-2} h'_m(u_i) h'_m(u_{r-1}) du_{r-1} \ldots du_{r-j}$$

$$A_j = \int_{u_r}^{u_{r-j-1}} \cdots \int_{u_r}^{u_{r-3}} \prod_{i=1}^{r-2} h'_m(u_i) h_m(u_{r-1}) \Big|_{u_r}^{u_{r-2}} du_{r-2} \ldots du_{r-j}$$

$$= \int_{u_r}^{u_{r-j-1}} \cdots \int_{u_r}^{u_{r-3}} \prod_{i=1}^{r-3} h'_m(u_i) h'_m(u_{r-2}) \left[h_m(u_{r-2}) - h_m(u_r) \right] du_{r-2} \ldots du_{r-j}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{u_r}^{u_{r-j-1}} \cdots \int_{u_r}^{u_{r-4}} \prod_{i=1}^{r-3} h'_m(u_i) \left[h_m(u_{r-2}) - h_m(u_r) \right]^2 \Big|_{u_r}^{u_{r-3}} du_{r-3} \ldots du_{r-j}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{u_r}^{u_{r-j-1}} \cdots \int_{u_r}^{u_{r-4}} \prod_{i=1}^{r-4} h'_m(u_i) h'_m(u_{r-3}) \left[h_m(u_{r-3}) - h_m(u_r) \right]^2 du_{r-3} \ldots du_{r-j}$$

$$= \frac{1}{3!} \int_{u_r}^{u_{r-j-1}} \cdots \int_{u_r}^{u_{r-5}} \prod_{i=1}^{r-5} h'_m(u_i) h'_m(u_{r-4}) \left[h_m(u_{r-4}) - h_m(u_r) \right]^3 du_{r-4} \ldots du_{r-j}$$

وبتكرار إجراء التكامل نحصل على العلاقة (4.7) □

نظرية (4.3)

إذا كان $U_d(r,n,m,k)$ ، $r\in\{1,...,n\}$ هو الإحصاء المرتب المعمم المرافق المنتظم حيث $m_1=...m_{n-1}=m$ ، فإن دالة الكثافة الهامشية له تعطى بالعلاقة:

$$f^{U_d(r,n,m,k)}(u)=\frac{C_{r-1}}{\Gamma(r)}u^{\gamma_r-1}g_m^{r-1}(u), \qquad (4.8)$$

البرهان

نقطة البداية العلاقة (4.7) وبوضع $j=r-1,\ u_0=1$ نحصل على

$$A_j=A_{r-1}=\int_{u_r}^{1}...\int_{u_r}^{u_{r-2}}\prod_{i=1}^{r-1}h'_m(u_i)du_{r-1}...du_1$$

$$=\frac{1}{(r-1)!}\left[h_m(u_r)-h_m(1)\right]^{r-1}$$

$$=\frac{1}{(r-1)!}g_m^{r-1}(u_r)$$

وبالتالي من العلاقة (4.5) نحصل على

$$f^{U_d(r,n,m,k)}(u_r)=\int_{u_r}^{1}...\int_{u_r}^{u_{r-2}}f^{U_d(1,n,m,k),..U_d(r,n,m,k)}(u_1,...,u_r)du_{r-1}...du_1$$

$$f^{U_d(r,n,m,k)}(u_r)=C_{r-1}u_r^{\gamma_r-1}\int_{u_r}^{1}...\int_{u_r}^{u_{r-2}}\prod_{i=1}^{r-1}h'_m(u_i)du_{r-1}...du_1$$

$$=\frac{C_{r-1}}{\Gamma(r)}u_r^{\gamma_r-1}g_m^{r-1}(u_r)$$

□

وباستخدام العلاقة (4.2) نحصل على دالة الكثافة الهامشية للإحصاء المرتب المعمم المرافق $X_d(r,n,m,k)$ على أساس دالة التوزيع F على الصورة:

$$f^{X_d(r,n,m,k)}(x)=\frac{C_{r-1}}{\Gamma(r)}\left(F(x)\right)^{\gamma_r-1}g_m^{r-1}(F(x))f(x)\ , \qquad (4.9)$$

نظرية (4.4)

إذا كان $X_d(r,n,m,k)$ هو الإحصاء المرتب المعمم المرافق على أساس دالة التوزيع $F(x)$ ، وكانت $\gamma_j\neq\gamma_i$ لكل $j\neq i$ فإن دالة الكثافة الهامشية له تكون على الصورة:

$$f^{X_d(r,n,\tilde{m},k)}(x)=c_{r-1}f(x)\sum_{i=1}^{r} a_i(r)\left(F(x)\right)^{\gamma_i-1}, 1\le r\le n \quad , \qquad (4.10)$$

$$F^{X_d(r,n,\tilde{m},k)}(x)=c_{r-1}\sum_{i=1}^{r} \frac{a_i(r)}{\gamma_i}\left(F(x)\right)^{\gamma_i},\ 1\le r\le n \quad , \qquad (4.11)$$

حيث أن $a_i = a_i(r) = \prod_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{r} \frac{1}{\gamma_j-\gamma_i}$

راجع **Athar, Anwar and Khan (2008)**

نظرية (4.5)

إذا كان $U_d(r,n,\tilde{m},k)$ و $U_d(s,n,\tilde{m},k)$ هما الإحصاءان المرتبان المعممان المنتظمان حيث $r<s$ و باختيار $m_1=...=m_{r-1}=\mu$ و $m_{r+1}=...=m_{s-1}=\nu$، فإن دالة الكثافة المشتركة لهما تعطى بالعلاقة:

$$f^{U_d(r,n,\tilde{m},k),U_d(s,n,\tilde{m},k)}(u_r,u_s)=\frac{c_{s-1}}{(r-1)!(s-r-1)!}u_r^{\,m_r}g_\mu^{r-1}(u_r)$$

$$\times\left(h_\nu(u_r)-h_\nu(u_s)\right)^{s-r-1}u_s^{\,\gamma_s-1}, \qquad u_r>u_s \qquad (4.12)$$

البرهان:

لنفرض أن $s-r\ge 2$.

نقطة البداية هي دالة الكثافة المشتركة لأول s من الإحصاءات المرتبة المعممة المنتظمة.

$$f^{U_d(r,n,\tilde{m},k),U_d(s,n,\tilde{m},k)}(u_r,u_s)=\int_{u_r}^{1}\cdots\int_{u_r}^{u_{r-2}}\cdot\int_{u_s}^{u_r}\cdots\int_{u_s}^{u_{s-2}} f^{U_d(1),\ldots,U_d(s)}(u_1,\ldots,u_s)$$

$$\times du_{s-1}\ldots du_{r+1}du_{r-1}\ldots du_1$$

$$f^{U_d(r,n,\tilde{m},k),U_d(s,n,\tilde{m},k)}(u_r,u_s)=C_{s-1}\int_{u_r}^{1}\cdots\int_{u_r}^{u_{r-2}}\cdot\int_{u_s}^{u_r}\cdots\int_{u_s}^{u_{s-2}}\left(\prod_{j=1}^{s-1} u_j^{\,m_j}\right)u_s^{\,\gamma_s-1}$$

$$\times du_{s-1}\ldots du_{r+1}du_{r-1}\ldots du_1$$

$$=C_{s-1}u_r^{m_r}u_s^{\gamma_s-1}A_{r-1}I_\nu\,, \qquad (4.13)$$

حيث أن

$$I_v=\int_{u_s}^{u_r}\cdots\int_{u_s}^{u_{s-2}}\prod_{j=r+1}^{s-1}h'_v(u_j)du_{s-1}...du_{r+1}$$

$$=\int_{u_s}^{u_r}\cdots\int_{u_s}^{u_{s-2}}\prod_{j=r+1}^{s-2}h'_v(u_j)h'_v(u_{s-1})du_{s-1}...du_{r+1}$$

$$I_v=\int_{u_s}^{u_r}\cdots\int_{u_s}^{u_{s-3}}\prod_{j=r+1}^{s-2}h'_v(u_j)h_v(u_{s-1})\Big|_{u_s}^{u_{s-2}}du_{s-2}...du_{r+1}$$

$$=\int_{u_s}^{u_r}\cdots\int_{u_s}^{u_{s-3}}\prod_{j=r+1}^{s-3}h'_v(u_j)h'_v(u_{s-2})\left[h_v(u_{s-2})-h_v(u_s)\right]du_{s-2}...du_{r+1}$$

$$=\frac{1}{2}\int_{u_s}^{u_r}\cdots\int_{u_s}^{u_{s-4}}\prod_{j=r+1}^{s-4}h'_v(u_j)h'_v(u_{s-3})\left[h_v(u_{s-3})-h_v(u_s)\right]^2du_{s-3}...du_{r+1}$$

$$=\frac{1}{3!}\int_{u_s}^{u_r}\cdots\int_{u_s}^{u_{s-5}}\prod_{j=r+1}^{s-5}h'_v(u_j)h'_v(u_{s-4})\left[h_v(u_{s-4})-h_v(u_s)\right]^3du_{s-4}...du_{r+1}$$

$$=\frac{1}{(s-r-2)!}\int_{u_s}^{u_r}h'_v(u_{r+1})\left[h_v(u_{r+1})-h_v(u_s)\right]^{s-r-2}du_{r+1}$$

$$=\frac{1}{(s-r-1)!}\left[h_v(u_r)-h_v(u_s)\right]^{s-r-1}$$

و من تمهيدية (4.1) و نظرية (4.3) فإن:

$$A_{r-1}=\int_{u_r}^{1}\cdots\int_{u_r}^{u_{r-2}}\cdot\left(\prod_{i=1}^{r-1}h'_\mu(u_i)\right)du_{r-1}...du_1$$

$$=\frac{1}{(r-1)!}\left[h_\mu(u_r)-h_\mu(1)\right]^{r-1}$$

$$=\frac{1}{(r-1)!}g_\mu^{r-1}(u_r)$$

و بالتعويض عن قيمة I_v و A_{r-1} في العلاقة (4.13) نحصل على المطلوب.

و باختيار $m_1=...=m_{s-1}=m$ فإن العلاقة (4.12) تصبح على الصورة:

$$f^{U_d(r,n,m,k),U_d(s,n,m,k)}(u_r,u_s)=\frac{c_{s-1}}{(r-1)!(s-r-1)!}u_r{}^m g_m^{r-1}(u_r)$$

$$\times\left(h_m(u_r)-h_m(u_s)\right)^{s-r-1}u_s{}^{\gamma_s-1},\qquad u_r>u_s \qquad (4.14)$$

باستخدام العلاقة (4.2) يمكننا الحصول على دالة الكثافة المشتركة للإحصاءين $X_d(r,n,m,k)$ و $X_d(s,n,m,k)$ حيث $1\le r<s\le n$، على الصورة:

$$f^{X_d(r,n,m,k),X_d(s,n,m,k)}(x_r,x_s)$$

$$=\frac{C_{s-1}}{(r-1)!(s-r-1)!}\left(F(x_r)\right)^m g_m^{r-1}(F(x_r))\,f(x_r)$$

$$\times\left(h_m(F(x_r))-h_m(F(x_s))\right)^{s-r-1}\left(F(x_s)\right)^{\gamma_s-1}f(x_s),$$

$$x_r\ge x_s \qquad (4.15)$$

ملاحظة (4.1)

باختيار مناسب للمعالم $\gamma_1,..,\gamma_n$، يمكن الحصول على بعض النماذج المشهورة للمتغيرات العشوائية المرتبة التي يمكن أن توصف عن طريق الإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة،

وللسهولة سنفرض في كل مما يأتي أن دالة التوزيع F مطلقة الاتصال وأن دالة كثافة الاحتمال هي f .

حالات خاصة:

1- بوضع $m=0$ و $k=1$ أي أن $\gamma_j=n-j+1$ لكل $1\le j\le n$، فإن:

$$f^{X_d(1,n,0,1),\ldots,X_d(n,n,0,1)}(x_1,\ldots,x_n)=\left(\prod_{j=1}^{n}n-j+1\right)\left(\prod_{j=1}^{n-1}f(x_j)\right)f(x_n)$$

$$=n!\prod_{j=1}^{n}f(x_j)$$

وهكذا فإن الإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة تتضمن نموذج الإحصاءات المرتبة المعكوسة الترتيب (reversed ordered order statistics) $X_{n:n},\ldots,X_{1:n}$ من عينة مشاهدات مستقلة ومتطابقة التوزيع مأخوذة من دالة التوزيع F. أي أن الإحصاءات المرتبة العادية تظهر في كلا النموذجين.

2- بوضع $m=-1$ و $k=1$ أي أن $\gamma_j=1$ لكل $1\le j\le n$

$$f^{X_d(1,n,-1,1),\dots,X_d(n,n,-1,1)}(x_1,\dots,x_n)=\prod_{j=1}^{n-1}\frac{f(x_j)}{F(x_j)}f(x_n)$$

أي أن توزيع الإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة $X_d(1,n,m,k),\dots,X_d(n,n,m,k)$ يؤول إلى التوزيع لأول n من التسجيلات الدنيا $R_1^*,\dots,R_n^*$ لسلسلة من المتغيرات العشوائية المستقلة والمتطابقة التوزيع $(X_i)_{i\in N}$، حيث $X_i \sim F$ لكل $i\in N$. و كامتداد لهذا التوزيع نضع $\gamma_j=k$ لكل $1\le j\le n$ و$k\in N$ نحصل على دالة الكثافة المشتركة للتسجيلات الدنيا من النوع k على الصورة

$$f^{X_d(1,n,-1,k),\dots,X_d(n,n,-1,k)}(x_1,\dots,x_n)=k^n\left(\prod_{j=1}^{n-1}\frac{f(x_j)}{F(x_j)}\right)\left(F(x_n)\right)^{k-1}f(x_n),$$

$$x_1>\dots>x_n$$

وقد عرّف (Dziubdziela and Kopociński (1976)) نموذج التسجيلات من النوع k باعتبار $(X_i)_{i\in N}$ متسلسلة من المتغيرات العشوائية المستقلة و المتطابقة التوزيع. وبفرض أن $(X_{k,j})_{j=k,k+1,\dots}$ متسلسلة مناظرة غير تزايدية من الإحصاءات المرتبة. فإن القيم المسجلة الدنيا من النوع k يمكن تعريفها بأنها متسلسلة جزئية تناقصية نحصل عليها من حذف كل التكرارات من المتسلسلة $(X_{k,j})_{j=k,k+1,\dots}$.

لمزيد من المعلومات راجع (Arnold et al.(1998)).

3- في نموذج Pfeifer نجد أنه يمكن أن يتغير توزيع المتغيرات العشوائية بعد كل تسجيل. فإذا كان النموذج على أساس متسلسلة مزدوجة من المتغيرات العشوائية $\left(X_j^{(n)}\right)_{n,j\in N}$ حيث $X_j^{(n)}\sim F_n$ لكل $j\in N$، فإن تسجيلات Pfeifer الدنيا $X_{\Delta_n}^{(n)}$ لكل $n\in N$ تعرف بواسطة أزمنة التسجيلات $\Delta_1=1$ و

$$\Delta_{n+1}=\min\{j\in N; X_j^{(n+1)}<X_{\Delta_n}^{(n)}\},\quad n\in N$$

وإذا كانت دالة التوزيع التراكمية F_n مطلقة الاتصال و اعتبار f_n دالة الكثافة، فإن دالة الكثافة المشتركة لها تعطى بالعلاقة

$$f^{X_{\Delta_1}^{(1)},\dots,X_{\Delta_n}^{(n)}}(x_1,\dots,x_n)=\prod_{j=1}^{n-1}\frac{f_j(x_j)}{F_{j+1}(x_j)}f_n(x_n),\ x_1>\dots>x_n$$

وهي تكافئ دالة الكثافة المشتركة للإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة على أساس دالة التوزيع F بالمعالم $\gamma_1,..,\gamma_n$. إذا كانت دوال التوزيع تأخذ الصورة الخاصة $F_n = F^{\gamma_n}$ لكل $n \in N$. فإن تسجيلات Pfeifer الدنيا بهذا القيد المفروض على دوال التوزيع يمكن أن نعتبرها الإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة.

تمهيدية (4.2) ((Mbah and Ahsanullah (2007))

نفرض أن F دالة توزيع مطلقة الاتصال لها دالة كثافة الاحتمال f فإن دالة التوزيع الهامشية للإحصاء المرتب المعمم المرافق الرائي $X_d(r,n,m,k)$ حيث $m_1 = ... = m_{r-1} = m$ تعطى بالعلاقة:

$$F^{X_d(r,n,m,k)}(x) = \begin{cases} I_{\alpha(x)}\left(\dfrac{\gamma_r}{m+1}, r\right), & for\ m > -1 \\ \\ 1-\Gamma_{\beta(x)}(r) & , for\ m = -1 \end{cases}, \qquad (4.16)$$

حيث $\alpha(x) = F^{m+1}(x), I_x(p,q) = \dfrac{1}{Beta(p,q)}\int\limits_0^x t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$

و $\beta(x) = -k\ln\left(F(x)\right),\ and\ \Gamma_x(r) = \dfrac{1}{\Gamma(r)}\int\limits_0^x t^{r-1}e^{-t}dt$

(راجع ملحق الرسالة).

البرهان

في حالة $m > -1$

$$F^{X_d(r,n,m,k)}(x) = \int\limits_{-\infty}^x f^{T_d(r,n,m,k)}(t)dt$$

$$= \frac{C_{r-1}}{\Gamma(r)}\int\limits_{-\infty}^x \left(F(t)\right)^{\gamma_r - 1} g_m^{r-1}(F(t))\, f(t)dt$$

$$= \frac{C_{r-1}}{\Gamma(r)}(m+1)^{1-r}\int\limits_{-\infty}^x \left(F(t)\right)^{\gamma_r - 1}\left[1-(F(t))^{m+1}\right]^{r-1} f(t)dt$$

و بوضع $u=F(t)\Rightarrow du=f(t)dt$ نحصل على

$$F^{X_d(r,n,m,k)}(x)=\frac{C_{r-1}}{\Gamma(r)}(m+1)^{1-r}\int_0^{F(x)}u^{\gamma_r-1}\left[1-u^{m+1}\right]^{r-1}du$$

و بوضع

$$v=u^{m+1}$$

$$u=v^{\frac{1}{m+1}}\Rightarrow du=\frac{1}{m+1}v^{\frac{1}{m+1}-1}dv$$

$$u=0\to v=0,\ \ u=F(x)\to v=\left(F(x)\right)^{m+1}$$

نحصل على

$$F^{X_d(r,n,m,k)}(x)=\frac{C_{r-1}}{\Gamma(r)}(m+1)^{-r}\int_0^{(F(x))^{m+1}}v^{\frac{\gamma_r}{m+1}-1}(1-v)^{r-1}dv$$

$$F^{X_d(r,n,m,k)}(x)=\frac{1}{\Gamma(r)}\frac{\prod_{j=1}^{r}\gamma_j}{(m+1)^r}\int_0^{(F(x))^{m+1}}v^{\frac{\gamma_r}{m+1}-1}(1-v)^{r-1}dv$$

$$F^{X_d(r,n,m,k)}(x)=\frac{1}{\Gamma(r)}\left(\frac{\gamma_r}{m+1}+(r-1)\right)\ldots\left(\frac{\gamma_r}{m+1}+1)\right)\cdot\left(\frac{\gamma_r}{m+1}\right)\frac{\left(\frac{\gamma_r}{m+1}-1\right)!}{\left(\frac{\gamma_r}{m+1}-1\right)!}$$

$$\times\int_0^{(F(x))^{m+1}}v^{\frac{\gamma_r}{m+1}-1}(1-v)^{r-1}dv$$

حيث $\gamma_j=\gamma_r+(r-j)(m+1)$ ، $j=1,2,...,r$

$$F^{X_d(r,n,m,k)}(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_r}{m+1}+r\right)}{\Gamma(r)\Gamma\left(\frac{\gamma_r}{m+1}\right)}\int_0^{(F(x))^{m+1}}v^{\frac{\gamma_r}{m+1}-1}(1-v)^{r-1}dv$$

$$=I_{\alpha(x)}\left(r,\frac{\gamma_r}{m+1}\right),\ \alpha(x)=\left(F(x)\right)^{m+1},m>-1$$

و عندما $\gamma_j=k,\ j=0,1,...,n\ ,m=-1$ فإن:

$$F^{X_d(r,n,m,k)}(x) = \int_{-\infty}^{x} F^{T_d(r,n,m,k)}(t)dt$$

$$= \frac{C_{r-1}}{\Gamma(r)} \int_{-\infty}^{x} \left(F(t)\right)^{\gamma_r - 1} g_m^{r-1}(F(t)) f(t)dt$$

$$= 1 - \frac{k^r}{\Gamma(r)} \int_{x}^{\infty} \left(F(t)\right)^{\gamma_r - 1} \left[-\ln F(t)\right]^{r-1} f(t)dt$$

و بوضع

$$u = -\ln F(t) \Rightarrow e^{-u} = F(t) \Rightarrow -e^{-u}du = f(t)dt$$

$$t = \infty \to u = 0, \quad t = x \to u = -\ln F(x)$$

نحصل على

$$F^{X_d(r,n,m,k)}(x) = 1 - \frac{k^r}{\Gamma(r)} \int_{0}^{-\ln F(x)} e^{-ku} u^{r-1} du$$

$$= 1 - \frac{k^{r-1}}{\Gamma(r)} \int_{0}^{-k\ln F(x)} e^{-v} \left(\frac{v}{k}\right)^{r-1} dv$$

$$F^{X_d(r,n,m,k)}(x) = 1 - \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{0}^{-k\ln F(x)} v^{r-1} e^{-v} dv$$

$$= 1 - \Gamma_{\beta(x)}(r), \qquad \beta(x) = -k\ln F(x)$$

تمهيدية (4.3): (Ahsanullah (2004)

عندما $m > -1$ فإن

$$\gamma_{r+1}\left(F^{X_d(r+1,n,m,k)}(x) - F^{X_d(r,n,m,k)}(x)\right) = \frac{F(x)}{f(x)} f^{X_d(r+1,n,m,k)}(x), \quad (4.17)$$

و عندما $m = -1$ فإن:

$$k\left(F^{X_d(r+1,n,m,k)}(x) - F^{X_d(r,n,m,k)}(x)\right) = \frac{F(x)}{f(x)} f^{X_d(r+1,n,m,k)}(x), \quad (4.18)$$

البرهان:

عندما $m > -1$، من العلاقة (4.16) فإن

$$F^{X_d(r+1,n,m,k)}(x)-F^{X_d(r,n,m,k)}(x)=I_{\alpha(x)}\left(\frac{\gamma_{r+1}}{m+1},r+1\right)-I_{\alpha(x)}\left(\frac{\gamma_r}{m+1},r\right)$$
$$=I_{\alpha(x)}\left(\frac{\gamma_r}{m+1}-1,r+1\right)-I_{\alpha(x)}\left(\frac{\gamma_r}{m+1},r\right)$$

و حيث أن

$$I_x(a-1,b+1)-I_x(a,b)=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b+1)}x^{a-1}(1-x)^b$$

راجع ملحق الرسالة.

و بالتالي فإن:

$$F^{X_d(r+1,n,m,k)}(x)-F^{X_d(r,n,m,k)}(x)$$
$$=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_r}{m+1}+r\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_r}{m+1}\right)\Gamma(r+1)}(F(x))^{(m+1)(\frac{\gamma_r}{m+1}-1)}\left(1-(F(x))^{m+1}\right)^r$$
$$=\frac{(r+\frac{\gamma_r}{m+1}-1)!}{r!(\frac{\gamma_r}{m+1}-1)!}\left(1-(F(x))^{m+1}\right)^r(F(x))^{\gamma_r-(m+1)}$$

$$=\frac{(r+\frac{\gamma_{r+1}}{m+1})!}{r!(\frac{\gamma_{r+1}}{m+1})!}\left(1-(F(x))^{m+1}\right)^r(F(x))^{\gamma_{r+1}}$$

$$F^{X_d(r+1,n,m,k)}(x)-F^{X_d(r,n,m,k)}(x)$$
$$=\frac{(\gamma_{r+1}+r(m+1))\cdot(\gamma_{r+1}+(r-1)(m+1))\dots(\gamma_{r+1}+(m+1))}{\Gamma(r+1)}\frac{(\frac{\gamma_{r+1}}{m+1})!}{(\frac{\gamma_{r+1}}{m+1})!}$$
$$\times\left(\frac{1-(F(x))^{m+1}}{m+1}\right)^r(F(x))^{\gamma_{r+1}}$$

وحيث أن $\gamma_{r+1}+(m+1)j=\gamma_{r-j+1},\ j=1,2,\dots,r$ فإن:

$$F^{X_d(r+1,n,m,k)}(x)-F^{X_d(r,n,m,k)}(x)=\frac{\gamma_1\cdots\gamma_r}{\Gamma(r+1)}\left(g_m(F(x))\right)^r(F(x))^{\gamma_{r+1}}$$

$$=\frac{C_r}{\gamma_{r+1}\Gamma(r+1)}\frac{F(x)}{f(x)}\left(g_m(F(x))\right)^r(F(x))^{\gamma_{r+1}-1}f(x)$$

من العلاقة (4.9) نجد أن

$$F^{X_d(r+1,n,m,k)}(x)-F^{X_d(r,n,m,k)}(x)=\frac{F(x)}{\gamma_{r+1}f(x)}f^{X_d(r+1,n,m,k)}(x)$$

$$\gamma_{r+1}(F^{X_d(r+1,n,m,k)}(x)-F^{X_d(r,n,m,k)}(x))=\frac{F(x)}{f(x)}f^{X_d(r+1,n,m,k)}(x)$$

عندما $m=-1$

$$F^{X_d(r+1,n,m,k)}(x)-F^{X_d(r,n,m,k)}(x)=1-\Gamma_{\beta(x)}(r+1)-\left(1-\Gamma_{\beta(x)}(r)\right)$$

$$=\Gamma_{\beta(x)}(r)-\Gamma_{\beta(x)}(r+1)$$

و حيث أن $\Gamma_x(a)-\Gamma_x(a+1)=\frac{e^{-x}x^a}{\Gamma(a+1)}$

و بالتالي فإن:

$$F^{X_d(r+1,n,m,k)}(x)-F^{X_d(r,n,m,k)}(x)=\Gamma_{\beta(x)}(r)-\Gamma_{\beta(x)}(r+1)$$

$$F^{X_d(r+1,n,m,k)}(x)-F^{X_d(r,n,m,k)}(x)=\frac{e^{k\ln(F(x))}\left[-k\ln(F(x))\right]^r}{\Gamma(r+1)}$$

$$=k^r\frac{e^{\ln(F(x))^k}\left[-\ln(F(x))\right]^r}{\Gamma(r+1)}$$

$$=k^{r+1}\frac{\left[F(x)\right]^{k-1}\left[-\ln(F(x))\right]^r}{\Gamma(r+1)}f(x)\frac{F(x)}{k\,f(x)}$$

ومن العلاقة (4.9) نجد أن

$$k\left(F^{X_d(r+1,n,m,k)}(x)-F^{X_d(r,n,m,k)}(x)\right)=\frac{C_r}{\Gamma(r+1)}\left[F(x)\right]^{\gamma_{r+1}-1}g_m^r f(x)\frac{F(x)}{f(x)}$$

$$k\left(F^{X_d(r+1,n,m,k)}(x)-F^{X_d(r,n,m,k)}(x)\right)=\frac{F(x)}{f(x)}f^{X_d(r+1,n,m,k)}(x)$$

(4.2) العزوم و العلاقات التكرارية للإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة من النوع m

Moments and Recurrence Relations of m-dgos

في هذا الفصل سنحصل على علاقتين تكراريتين مهمتين للعزوم المفردة و المختلطة للإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة من النوع m من دالة توزيع متصلة اختيارية عندما $m>-1$. و سنرمز بالرمز $\mu_{r:n,m,k}^{(\alpha)}=E\left(\left(X_d(r,n,m,k)\right)^{\alpha}\right)$ للعزم من الرتبة α للإحصاء المرتب المعمم المرافق الرائي من النوع m، و $\mu_{r,s:n,m,k}^{(\alpha_1,\alpha_2)}=E\left(\left(X_d(r,n,m,k)\right)^{\alpha_1}\left(X_d(sn,m,k)\right)^{\alpha_2}\right)$ ترمز للعزوم المختلطة للإحصاءين $X_d(r,n,m,k), X_d(s,n,m,k)$ من الرتبة $\alpha_1+\alpha_2$.

نظرية (4.6)

لنفرض أن α,r,n أعداد صحيحة موجبة، حيث $1\le r\le n$. فإنه لأي $m>-1$ يكون

$$\gamma_{r+1,n}f^{X_d(r,n,m,k)}(x)+r(m+1)f^{X_d(r+1,n,m,k)}(x)=\gamma_{1,n}f^{X_d(r,n-1,m,k)}(x),(4.19)$$

البرهان: حيث أن

$$\gamma_{i+1,n}+(m+1)=\gamma_{i,n},$$

$$\gamma_{i+1,n}=\gamma_{i,n-1},$$

$$C_{r-1,n}=\prod_{j=1}^{r}\gamma_{j,n},\ C_{r-1,n-1}=\prod_{j=1}^{r}\gamma_{j,n-1}$$

$$C_{r,n}=\gamma_{1,n}C_{r-1,n-1}$$

ومن العلاقة (4.9) نجد أن

$$\gamma_{r+1,n}f^{X_d(r,n,m,k)}(x)+r(m+1)f^{X_d(r+1,n,m,k)}(x)$$
$$=\frac{\gamma_{r+1,n}C_{r-1,n}}{\Gamma(r)}F^{\gamma_{r,n}-1}(x)g_m^{r-1}(F(x))f(x)$$
$$+\frac{r(m+1)C_{r,n}}{\Gamma(r+1)}F^{\gamma_{r+1,n}-1}(x)g_m^{r}(F(x))f(x)$$

$$\gamma_{r+1,n} f^{X_d(r,n,m,k)}(x) + r(m+1) f^{X_d(r+1,n,m,k)}(x)$$

$$= \frac{\gamma_{r+1,n} C_{r-1,n}}{\Gamma(r)} \left(F(x)\right)^{\gamma_{r,n}-1} g_m^{r-1}(F(x)) f(x)$$

$$+ \frac{\gamma_{r+1,n}(m+1) C_{r-1,n}}{\Gamma(r)} \left(F(x)\right)^{\gamma_{r,n}-1+\gamma_{r+1,n}-\gamma_{r,n}} g_m^{r}(F(x)) f(x)$$

$$= \gamma_{r+1,n} f^{X_d(r,n,m,k)}(x)\left(1+(m+1)\left(F(x)\right)^{\gamma_{r+1},n-\gamma_{r,n}}\left(\frac{1-\left(F(x)\right)^{m+1}}{(m+1)}\right)\right)$$

$$= \gamma_{r+1,n} f^{X_d(r,n,m,k)}(x)\left(1+\left(F(x)\right)^{\gamma_{r+1,n}-\gamma_{r,n}}\left(1-F(x)^{m+1}\right)\right)$$

$$= \gamma_{r+1,n} f^{X_d(r,n,m,k)}(x)\left(\left(F(x)\right)^{\gamma_{r+1,n}-\gamma_{r,n}}\right)$$

$$= \gamma_{r+1,n}\left(F(x)\right)^{-(m+1)} f^{X_d(r,n,m,k)}(x)$$

$$= \frac{\gamma_{r+1,n} C_{r-1,n}}{\Gamma(r)} \left(F(x)\right)^{\gamma_{r,n}-(m+1)-1}(x) g_m^{r-1}(F(x)) f(x)$$

$$= \frac{C_{r,n}}{\Gamma(r)} \left(F(x)\right)^{\gamma_{r+1,n}-1} g_m^{r-1}(F(x)) f(x)$$

$$= \frac{\gamma_{1,n} C_{r-1,n-1}}{\Gamma(r)} \left(F(x)\right)^{\gamma_{r,n-1}-1} g_m^{r-1}(F(x)) f(x)$$

$$= \gamma_{1,n} f^{X_d(r,n-1,m,k)}(x)$$

□

ومنها يمكن الحصول على العلاقة التكرارية للعزوم على الصورة:

$$\gamma_{r+1,n}\mu_{r:n,m,k}^{(\alpha)}(x) + r(m+1)\mu_{r+1:n,m,k}^{(\alpha)}(x) = \gamma_{1,n}\mu_{r:n-1,m,k}^{(\alpha)}(x) \qquad (4.20)$$

نظرية (4.7)

لنفرض أن r,s,n أعداد صحيحة موجبة، حيث $1 \le r < s \le n$ فإنه لأي $m > -1$ يكون

$$r(m+1) f^{X_d(r+1,n,m,k),X_d(s+1,n,m,k)}(x_r, x_s) + (s-r)(m+1) f^{X_d(r,n,m,k),X_d(s+1,n,m,k)}(x_r, x_s) + \gamma_{s+1,n} f^{X_d(r,n,m,k),X_d(s,n,m,k)}(x_r, x_s) = \gamma_{1,n} f^{X_d(r,n-1,m,k),X_d(s,n-1,m,k)}(x_r, x_s)$$

البرهان

$$r(m+1) f^{X_d(r+1,n,m,k),X_d(s+1,n,m,k)}(x_r, x_s) + (s-r)(m+1) f^{X_d(r,n,m,k),X_d(s+1,n,m,k)}(x_r, x_s)$$

$$= \frac{r(m+1)C_{s,n}}{r!(s-r-1)!}\left(F(x_r)\right)^m g_m^r\left(F(x_r)\right) f(x)\left(h_m(F(x_r)) - h_m(F(x_s))\right)^{s-r-1}$$

$$\times\left(F(x_s)\right)^{\gamma_{s+1,n}-1} f(x_s) + \frac{(s-r)(m+1)C_{s,n}}{(r-1)!(s-r)!}\left(F(x_r)\right)^m$$

$$\times g_m^{r-1}\left(F(x_r)\right) f(x_r)\left(h_m(F(x_r)) - h_m(F(x_s))\right)^{s-r}\left(F(x_s)\right)^{\gamma_{s+1,n}-1} f(x_s)$$

$$= (m+1)\frac{C_{s,n}}{(r-1)!(s-r-1)!}\left(F(x_r)\right)^m g_m^r\left(F(x_r)\right) f(x_r)\left(h_m(x_r) - h_m(x_s)\right)^{s-r-1}$$

$$\times\left(F(x_s)\right)^{\gamma_{s+1,n}-1} f(x_s) + (m+1)\frac{C_{s,n}}{(r-1)!(s-r-1)!}\left(F(x_r)\right)^m$$

$$\times g_m^{r-1}\left(F(x_r)\right) f(x_r)\left(h_m(F(x_r)) - h_m(F(x_s))\right)^{s-r}\left(F(x_s)\right)^{\gamma_{s+1,n}-1} f(x_s)$$

$$= \frac{(m+1)C_{s,n}}{(r-1)!(s-r-1)!}\left(F(x_r)\right)^m g_m^{r-1}\left(F(x_r)\right) f(x_r)\left(h_m(F(x_r)) - h_m(F(x_s))\right)^{s-r-1}$$

$$\times\left(F(x_s)\right)^{\gamma_{s+1,n}-1} f(x_s)\left(g_m\left(F(x_r)\right) + h_m(F(x_r)) - h_m(F(x_s))\right)$$

$$r(m+1) f^{X_d(r+1,n,m,k),X_d(s+1,n,m,k)}(x_r, x_s) + (s-r)(m+1) f^{X_d(r,n,m,k),X_d(s+1,n,m,k)}(x_r, x_s)$$

$$= \frac{(m+1)C_{s,n}}{(r-1)!(s-r-1)!}\left(F(x_r)\right)^m g_m^{r-1}\left(F(x_r)\right) f(x_r)\left(h_m\left(F(x_r)\right) - h_m\left(F(x_s)\right)\right)^{s-r-1}$$

$$\times\left(F(x_s)\right)^{\gamma_{s+1,n}-1} f(x_s)\left[h_m(1) - h_m(F(x_r)) + h_m(F(x_r)) - h_m(F(x_s))\right]$$

$$=\frac{(m+1)C_{s,n}}{(r-1)!(s-r-1)!}\left(F(x_r)\right)^m g_m^{r-1}\left(F(x_r)\right) f(x_r)\left(h_m\left(F(x_r)\right)-h_m\left(F(x_s)\right)\right)^{s-r-1}$$

$$\times\left(F(x_s)\right)^{\gamma_{s+1,n}-1} f(x_s)\left(\frac{1}{m+1}-h_m\left(F(x_s)\right)\right)$$

$$=\frac{C_{s,n}}{(r-1)!(s-r-1)!}\left(F(x_r)\right)^m g_m^{r-1}\left(F(x_r)\right) f(x_r)\left(h_m(x_r)-h_m(x_s)\right)^{s-r-1}$$

$$\times\left(F(x_s)\right)^{\gamma_{s+1,n}-1} f(x_s)-\frac{C_{s,n}}{(r-1)!(s-r-1)!}\left(F(x_r)\right)^m g_m^{r-1}\left(F(x_r)\right)$$

$$\times f(x_r)\left(h_m(x_r)-h_m(x_s)\right)^{s-r-1}\left(F(x_s)\right)^{\gamma_{s+1,n}+(m+1)-1} f(x_s)$$

$$=\frac{\gamma_{1,n}C_{s-1,n-1}}{(r-1)!(s-r-1)!}\left(F(x_r)\right)^m g_m^{r-1}\left(F(x_r)\right) f(x_r)\left(h_m(x_r)-h_m(x_s)\right)^{s-r-1}$$

$$\times\left(F(x_s)\right)^{\gamma_{s,n-1}-1} f(x_s)-\frac{\gamma_{s+1,n}C_{s-1,n}}{(r-1)!(s-r-1)!}\left(F(x_r)\right)^m g_m^{r-1}\left(F(x_r)\right)$$

$$\times f(x_r)\left(h_m(x_r)-h_m(x_s)\right)^{s-r-1}\left(F(x_s)\right)^{\gamma_{s,n}-1} f(x_s)$$

$$=\gamma_{1,n} f^{X_d(r,n-1,m,k),X_d(s,n-1,m,k)}(x_r,x_s)-\gamma_{s+1,n} f^{X_d(r,n,m,k),X_d(s,n,m,k)}(x_r,x_s)$$

□

و يمكن الحصول على العلاقة التكرارية للعزوم المختلطة على الصورة:

$$r(m+1)\mu_{r+1,s+1:n,m,k}^{(\alpha_1,\alpha_2)}+(s-r)(m+1)\mu_{r,s+1:n,m,k}^{(\alpha_1,\alpha_2)}+\gamma_{s+1,n}\mu_{r,s:n,m,k}^{(\alpha_1,\alpha_2)}$$
$$=\gamma_{1,n}\mu_{r,s:n-1,m,k}^{(\alpha_1,\alpha_2)}$$

(4.3) عزوم الإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة من توزيع القيمة المتطرفة المعمم

Moments of GOS for GEV

في هذا الفصل سنحصل على العزوم المضبوطة للإحصاءات المرتبة المعممة من النوع m و اشتقاق فرق العزوم لإحصاءين مرتبين معممين مرافقين متتابعين والمأخوذة من دالة توزيع القيمة المتطرفة المعمم، المعرف على الصورة:

$$F(x)=\exp[-(1+\zeta x)^{-1/\zeta}],\zeta\in R \;\; and \;\; 1+\zeta x\geq 0 \qquad (4.21)$$

نظرية (4.8)

لنفرض أن α,r,n أعداد صحيحة موجبة، حيث $1\leq r\leq n$، فإن:

$$\mu_{r:n,m,k}^{(\alpha)} = A_r(m)(-\zeta)^{-\alpha} \sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^{i+j} \binom{\alpha}{i} \binom{r-1}{j} [k+(m+1)(n-r+j)]^{\zeta i-1} \times \Gamma(1-\zeta i), \qquad (4.22)$$

و

$$\mu_{r:n,m,k}^{(\alpha)} - \mu_{r+1:n,m,k}^{(\alpha)} = \frac{A_r(m)}{r(m+1)} (-\zeta)^{1-\alpha} \sum_{i=0}^{\alpha-1} \sum_{j=0}^{r} (-1)^{i+j} \binom{\alpha-1}{i} \binom{r}{j} \times [k+(m+1)(n-r+j-1)]^{\zeta i-1} \Gamma(1-\zeta i), \qquad (4.23)$$

عندما $\zeta < 1/\alpha$ و $m > -1$ حيث

$$A_r(m) = \frac{C_{r-1}}{\Gamma(r)(m+1)^{r-1}}$$

البرهان:

باستخدام تمهيدية (4.3) فإن:

$$\mu_{r:n,m,k}^{(\alpha)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{\alpha} f^{X_d(r,n,m,k)}(x)dx = \frac{C_{r-1}}{\Gamma(r)} \int_{-\infty}^{\infty} x^{\alpha} F^{\gamma_r -1}(x) g_m^{r-1}(F(x)) f(x) dx$$

و بوضع $u = F(x)$ فإن العلاقة السابقة تصبح لأي $m \neq -1$على الصورة:

$$\mu_{r:n,m,k}^{(\alpha)} = \frac{C_{r-1}}{\Gamma(r)(m+1)^{r-1}} \int_0^1 \left(F^{-1}(u)\right)^{\alpha} u^{\gamma_r -1} \left(1-u^{m+1}\right)^{r-1} du$$

$$= A_r(m) \int_0^1 \left(-\zeta^{-1}[1-(-\ln u)^{-\zeta}]\right)^{\alpha} u^{\gamma_r -1} \left(1-u^{m+1}\right)^{r-1} du$$

حيث أن

$$u = e^{-(1+\zeta x)^{-1/\zeta}}$$

$$-\ln u = (1+\zeta x)^{-1/\zeta}$$

$$1+\zeta x = (-\ln u)^{-\zeta}$$

$$x = F^{-1}(u) = -\zeta^{-1}[1-(-\ln u)^{-\zeta}]$$

$$\mu_{r:n,m,k}^{(\alpha)} = A_r(m)(-\zeta)^{-\alpha} \sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^{i+j} \binom{\alpha}{i} \binom{r-1}{j} I_{i,j}(m,n,r,\zeta), \qquad (4.24)$$

حيث

$$I_{i,j}(m,n,r,\zeta)=\int_0^1 (-\ln u)^{-\zeta i} u^{(m+1)j+\gamma_r-1}du$$

باستخدام التعويض $v=-\ln u$ و بملاحظة أن $\gamma_r=k+(n-r)(m+1)$ يكون

$$I_{i,j}(m,n,r,\zeta)=\int_0^\infty v^{-\zeta i}e^{-\ell v}dv$$

$$=\ell^{\zeta i-1}\Gamma(1-\zeta i),\ell=k+(m+1)(n-r-j). \qquad (4.25)$$

و بالتعويض عن (4.25)في (4.24) نحصل على العلاقة (4.22).

لإثبات العلاقة (4.23) نتبع مايلي

$$\mu_{r+1:n,m,k}^{(\alpha)}-\mu_{r:n,m,k}^{(\alpha)}=\int_{-\infty}^{\infty} x^\alpha\left(f^{X_d(r+1,n,m,k)}(x)-f^{X_d(r,n,m,k)}(x)\right)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} x^\alpha d\left(F^{X_d(r+1,n,m,k)}(x)-F^{X_d(r,n,m,k)}(x)\right)$$

باستخدام التكامل بالتجزيء نضع

$$s=x^\alpha \quad , \quad dt=dF^{X_d(r+1,n,m,k)}(x)-F^{X_d(r,n,m,k)}(x)$$

$$ds=\alpha x^{\alpha-1}dx \quad , \quad t=F^{X_d(r+1,n,m,k)}(x)-F^{X_d(r,n,m,k)}(x)$$

$$\mu_{r+1:n,m,k}^{(\alpha)}-\mu_{r:n,m,k}^{(\alpha)}=-\alpha\int_{-\infty}^{\infty} x^{\alpha-1}\left(F^{X_d(r+1,n,m,k)}(x)-F^{X_d(r,n,m,k)}(x)\right)dx$$

حيث $x^\alpha\left(F^{X_d(r+1,n,m,k)}(x)-F^{X_d(r,n,m,k)}(x)\right)\Big|_{-\infty}^{\infty}=0$

ومن العلاقة (4.17) فإن

$$\mu_{r:n,m,k}^{(\alpha)}-\mu_{r+1:n,m,k}^{(\alpha)}=\frac{\alpha}{\gamma_{r+1}}\int_{-\infty}^{\infty} x^{\alpha-1}\ \frac{F(x)}{f(x)}\ f^{X_d(r+1,n,m,k)}(x)dx$$

$$=\frac{\alpha C_{r-1}}{r\Gamma(r)(m+1)^r}\int_{-\infty}^{\infty} x^{\alpha-1}F^{\gamma_{r+1}}(x)g_m^r(F(x))dx$$

و بوضع $u=F(x)$ فإن العلاقة السابقة تصبح لأي $m\neq -1$على الصورة:

$$\mu^{(\alpha)}_{r:n,m,k}(x)-\mu^{(\alpha)}_{r+1:n,m,k}=\frac{\alpha}{r(m+1)}A_r(m)\int_0^1 \left(F^{-1}(u)\right)^{\alpha-1}u^{\gamma_{r+1}}\left(1-u^{m+1}\right)^r du$$

$$=\frac{\alpha(-\zeta)^{1-\alpha}}{r(m+1)}A_r(m)\int_0^1 [1-(-\ln u)^{-\zeta}]^{\alpha-1}u^{\gamma_{r+1}}$$

$$\times\left(1-u^{m+1}\right)^r du$$

$$\mu^{(\alpha)}_{r:n,m,k}-\mu^{(\alpha)}_{r+1:n,m,k}=\frac{\alpha(-\zeta)^{-\alpha-1}}{r(m+1)}A_r(m)\sum_{i=0}^{\alpha-1}\sum_{j=0}^{r}(-1)^{i+j+1}\binom{\alpha-1}{i}\binom{r}{j}$$

$$\times I_{i,j}(m,n,r+1,\zeta) \qquad (4.26)$$

حيث

$$I_{i,j}(m,n,r+1,\zeta)=\int_0^1 (-\ln u)^{-\zeta i}u^{\gamma_{r+1}+(m+1)j}du$$

باستخدام التعويض $v=-\ln u$ و بملاحظة أن $\gamma_{r+1}=k+(n-r-1)(m+1)$ نحصل على

$$I_{i,j}(m,n,r+1,\zeta)=\int_0^\infty v^{-\zeta i}e^{-\tilde{\ell}v}dv$$

$$=\tilde{\ell}^{\zeta i-1}\Gamma(1-\zeta i),\quad \tilde{\ell}=k+(n-r+j-1)(m+1), \qquad (4.27)$$

و بالتعويض عن (4.27)في (4.26) نحصل على المطلوب □

حالات خاصة

(1)–الإحصاءات المرتبة العادية

عندما نضع في العلاقة (4.22) $m=0$ و $k=1$، فإنه يمكننا الحصول العزوم المفردة للإحصاء المرتبة العادية من الرتبة α المأخوذ من توزيع القيمة المتطرفة المعمم و التي تعطى على الصورة:

$$\mu^{(\alpha)}_{r:n}=r\binom{n}{r}(-\zeta)^{-\alpha}\sum_{i=0}^{\alpha}\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^{i+j}\binom{\alpha}{i}\binom{r-1}{j}[n-r+j+1]^{\zeta i-1}\Gamma(1-\zeta i)$$

$$(4.28)$$

و سنستخدم في حساباتنا برنامج Mathematica (الإصدار السابع) و ذلك لإيجاد قيم العزوم المضبوطة المفردة للإحصاءات المرتبة العادية، بالإضافة للعزوم المفردة للإحصاءات المرتبة المتعاقبة و تسجيلات Pfeifer.

جدول (4.1):العزوم للإحصاءات المرتبة العادية لتوزيع القيمة المتطرفة المعمم($\alpha = 1, \zeta = 0.25$)

n	r=1	2	3	4	5	6
2	1.8291	-0.0257634	***	***	***	***
3	2.45096	0.585379	-0.331334	***	***	***
4	2.932	1.00781	0.162943	-0.496093	***	***
5	3.3297	1.34121	0.507717	0.0669065	-0.60339	***
6	3.67152	1.62059	0.782451	0.232983	-0.216851	-0.680698

جدول (4.2):العزوم للإحصاءات المرتبة العادية لتوزيع القيمة المتطرفة المعمم($\alpha = 3, \zeta = 0.25$)

n	r=1	2	3	4	5	6
2	124.766	1.25019	***	***	***	***
3	185.144	4.00817	-0.128801	***	***	***
4	244.419	7.31915	0.69719	-0.404131	***	***
5	302.736	11.1526	1.56902	0.115968	-0.534156	***
6	360.203	15.4021	2.65358	0.484467	-0.0682809	-0.627331

(2) الإحصاءات المرتبة المتعاقبة:

جدول (4.3):العزوم للإحصاءات المرتبة المتعاقبة لتوزيع القيمة المتطرفة المعمم ($\alpha = 1, \zeta = 0.25$) ($\gamma_r = 2(n-r)+1$)

n	r=1	2	3	4	5	6
2	2.45096	0.127022	***	***	***	***
3	3.3297	1.13284	-0.124432	***	***	***
4	3.97294	1.72161	0.691257	-0.26038	***	***
5	4.48994	2.16344	1.16934	0.452217	-0.349455	***
6	4.92672	2.5244	1.53175	0.867325	0.296552	-0.414056

جدول (4.4):العزوم للإحصاءات المرتبة المتعاقبة لتوزيع القيمة المتطرفة المعمم

($\gamma_r = 2(n-r)+1$) ($\alpha = 3, \zeta = 0.25$)

n	r=1	2	3	4	5	6
2	185.144	1.93969	***	***	***	***
3	302.736	8.75668	0.235436	***	***	***
4	416.906	17.3107	2.34114	-0.115515	***	***
5	528.294	27.0502	5.13647	0.943472	-0.247888	***
6	637.338	37.5923	8.60146	2.24897	0.45391	-0.318068

(3) تسجيلات Pfeifer

جدول (4-5) العزوم لتسجيلات Pfeifer من توزيع القيم المتطرفة المعمم ($\gamma_r = (n-r+1)/n$)
($\alpha = 1, \zeta = 0.25$)

n	r					
	1	2	3	4	5	6
2	0.901667	-0.658079	***	***	***	***
3	0.901667	-0.515866	-1.21242	***	***	***
4	0.901667	-0.458941	-1.05635	-1.52236	***	***
5	0.901667	-0.428116	-0.985508	-1.36978	-1.72855	***
6	0.901667	-0.408761	-0.944286	-1.29536	-1.58278	-1.87915

جدول (4-6) العزوم لتسجيلات Pfeifer من توزيع القيم المتطرفة المعمم ($\gamma_r = (n-r+1)/n$)
($\alpha = 3, \zeta = 0.25$)

n	r					
	1	2	3	4	5	6
2	63.0079	-0.645831	***	***	***	***
3	63.0079	-0.219184	-2.52192	***	***	***
4	63.0079	-0.0586946	-1.8201	-4.12628	***	***
5	63.0079	0.0267993	-1.55614	-3.10878	-5.64322	***
6	63.0079	0.0801703	-1.4166	-2.68953	-4.39735	-7.02929

التعليق على النتائج:

نلاحظ من النتائج التي حصلنا عليها من الجداول السابقة عندما $\zeta < 1/\alpha$ ما يلي:

1- الإحصاءات المرتبة العادية:

- كلما كبر حجم العينة n، كبرت قيمة العزوم.
- كلما كبرت رتبة الإحصاء المرتب r، قلت قيمة العزوم.
- كلما كبرت رتبة العزم α، كبرت قيمته (تؤول إلى الانهاية).

2-- الإحصاءات المرتبة المتعاقبة:

- كلما كبر حجم العينة n، كبرت قيمة العزوم.
- كلما كبرت رتبة الإحصاء المرتب r، قلت قيمة العزوم.

- كلما كبرت رتبة العزم α، كبرت قيمته (تؤول إلى الانهاية).

3 – تسجيلات Pfeifer:

- قيمة العزم للتسجيل الأول لا تعتمد على حجم العينة n،و تساوي قيمة العزم للقيمة المسجلة العادية.
- كلما كبر حجم العينة n،كبرت قيمة العزوم.
- كلما كبرت رتبة الإحصاء المرتب r، قلت قيمة العزوم.
- كلما كبرت رتبة العزم α، كبرت قيمته (تؤول إلى الانهاية).

(4.4) الربط بين الإحصاءات المرتبة المعممة و الإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة

Connections Between GOS and DGOS

كما ذكرنا سابقاً أنه يوجد علاقة بين نموذجي المتغيرات العشوائية المرتبة ترتيباً تزايدياً و تناقصياً، وفي هذا الفصل سوف نربط بين الإحصاءات المرتبة المعممة و الإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة.

نظرية (4.9) Burkschat, Cramer and Kamps(2003)

نفرض أن $X(1,n,\tilde{m},k),...,X(n,n,\tilde{m},k)$ هي الإحصاءات المرتبة المعممة على أساس دالة توزيع متصلة G. وبفرض أن $X_d(1,n,\tilde{m},k),...,X_d(n,n,\tilde{m},k)$ هي الإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة على أساس دالة توزيع متصلة F فإن

$$\left(F(X_d(r,n,\tilde{m},k))\right)_{1\le r\le n} \sim \left(\prod_{j=1}^{r} B_j\right)_{1\le r\le n} \sim \left(1-G(X(r,n,\tilde{m},k))\right)_{1\le r\le n} \quad (4.29)$$

حيث $B_j \sim Beta(\gamma_j,1)$.

و هكذا ، فإنه باستخدام تحويل مناسب فإن كلا المفهومين يؤديان إلى نفس نموذج التوزيع النظري. و كحالة خاصة، عندما يكون $F=G\equiv[0,1]$ نحصل على العلاقة المهمة

$$\left(U_d(r,n,\tilde{m},k)\right)_{1\le r\le n} \sim \left(1-U(r,n,\tilde{m},k)\right)_{1\le r\le n} \quad (4.30)$$

العلاقة (4.30) تربط بين الإحصاءات المرتبة المعممة المنتظمة و الإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة المنتظمة. وكنتيجة لتعريف كلا المفهومين فإن البديهية التالية تكون محققة.

بديهية (4.2) ((Burkschat, Cramer and Kamps (2003))

بفرض $U(1,n,\tilde{m},k),...,U(n,n,\tilde{m},k)$، $\left(U_d(1,n,\tilde{m},k),...,U_d(n,n,\tilde{m},k)\right)$ هي الإحصاءات المرتبة المعممة (المرافقة) المنتظمة، وبفرض أن $X(1,n,\tilde{m},k),...,X(n,n,\tilde{m},k)$، $\left(X_d(1,n,\tilde{m},k),...,X_d(n,n,\tilde{m},k)\right)$ هي الإحصاءات المرتبة المعممة (المرافقة) على أساس دالة التوزيع F فإن:

$$\left(X_d(r,n,\tilde{m},k)\right)_{1\le r\le n} \sim \left(F^{-1}(1-U(r,n,\tilde{m},k)\right)_{1\le r\le n}$$

$$and$$

$$\left(X(r,n,\tilde{m},k)\right)_{1\le r\le n} \sim \left(F^{-1}(1-U_d(r,n,\tilde{m},k)\right)_{1\le r\le n}$$

وهي تعطي ربطاً مباشراً بين كلا النموذجين. و في الواقع فإن كل نموذج يمكن أن يوجد كتحويل للنموذج الآخر. لكن من الجدير بالذكر أنه من غير الملائم استخدام مثل هذه العلاقات لتحويل النتائج من الإحصاءات المرتبة المعممة إلى الإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة و العكس صحيح. لكن النظرية التالية تزودنا بأداة أكثر ملائمة لهذا الغرض

نظرية (4.10) ((Burkschat, Cramer and Kamps(2003))

بفرض أن المتغير العشوائي X له دالة توزيع تراكمية F_X، ونفرض أن F_{-X} ترمز لدالة التوزيع التراكمية للمتغير $-X$.

فإذا كانت $X(1,n,\tilde{m},k),...,X(n,n,\tilde{m},k)$ هي الإحصاءات المرتبة المعممة على أساس دالة التوزيع F_X، و$X_d(1,n,\tilde{m},k),...,X_d(n,n,\tilde{m},k)$ هي الإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة على أساس دالة التوزيع F_{-X} فإن:

$$\left(X_d(r,n,\tilde{m},k)\right)_{1\le r\le n} \sim \left(-X(r,n,\tilde{m},k)\right)_{1\le r\le n} \qquad (4.31)$$

البرهان

أولاً: عندما $n=1$ و باستخدام العلاقة (4.30)

$$P\left(X(1,n,\tilde{m},k) > -x-\varepsilon\right) = P\left(U(1,n,\tilde{m},k) > F_X(-x-\varepsilon)\right)$$
$$= P\left(1-U_d(1,n,\tilde{m},k) > F_X(-x-\varepsilon)\right)$$
$$= P\left(U_d(1,n,\tilde{m},k) \le 1-F_X(-x-\varepsilon)\right), \quad x\in R,\ \varepsilon>0$$

وحيث أن $F_{-X}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[1-F_X(-x-\varepsilon)\right]$ لكل $x\in R$ ، وبالتالي نستنتج أن

$$P\left(-X(1,n,\tilde{m},k)\le x\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}P\left(X(1,n,\tilde{m},k)>-x-\varepsilon\right)$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[U_d(1,n,\tilde{m},k)\le 1-F_X(-x-\varepsilon)\right]$$
$$=P\left(U_d(1,n,\tilde{m},k)\le F_{-X}(x)\right)$$

وبطريقة مشابهة يمكن إثبات العلاقة في حالة متعددة الأبعاد. □

تعتبر نظرية (2.5) مفتاح لعدة تطبيقات مفيدة منها على سبيل المثال اشتقاق العزوم المفردة والمختلطة، أو لإثبات عدة خصائص في التقدير. وبوضع

$X(0,n,\tilde{m},k)=X_d(0,n,\tilde{m},k)=0$ ، يمكن الحصول على هذه الخاصية بالنسبة للإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة مباشرة من العلاقة (4.31). النظرية التالية توضح أهمية نصف المحور السالب في النموذج التناقصي.

نظرية (4.11) (Burkschat, Cramer and Kamps(2003))

بفرض أن $X_d(n,n,\tilde{m},k)$,..., $X_d(1,n,\tilde{m},k)$ هي الإحصاءات المرتبة المعممة المرافقة على أساس التوزيع الأسي المعكوس (reflected exponential distribution) حيث أن $F(x)=\exp(x)$ ، لكل $x\in(-\infty,0)$ ، فإن الفضاءات الطبيعية $\gamma_r\left[X_d(r,n,\tilde{m},k)-X_d(r-1,n,\tilde{m},k)\right]$ ، لكل $1\le r\le n$ تكون مستقلة ومتطابقة التوزيع بالنسبة لدالة التوزيع F.

(4.4.1) مثال تطبيقي:

العائلة $\mathcal{G}=\{G_{c,d}:c>0,d\in R\}$ لتوزيعات باريتو المعممة (class of generalized Parrto distributions)، (cf. Johnson et al.(1994)) حيث:

$$G_{c,d}=\begin{cases}1-(1+cx)^{\frac{1}{d}}, x\in(0,\infty), & d<0\\ 1-\exp(-cx), x\in(0,\infty), & d=0\\ 1-(1-cx)^{\frac{1}{d}}, x\in(0,\frac{1}{c}), & d>0\end{cases}$$

أوجد الباحثون Burkschat, Cramer and Kamps (2002) العزم الأول للإحصاء المرتب المعمم الرائي على أساس دالة التوزيع $G_{c,d}$ على الصورة:

$$E\left(X(r,n,\tilde{m},k)\right)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sgn}(d)}{c}\left(1-\sum\limits_{i=1}^{r} a_i(r)\prod\limits_{j=1}^{r}\dfrac{\gamma_j}{\gamma_j+d}\right), & if\ d\neq 0,\gamma_j+d>0,\\ & 1\leq j\leq r\\ \dfrac{1}{c}\sum\limits_{j=1}^{r}\dfrac{1}{\gamma_j}, & if\ \ d=0\end{cases}$$

حيث أن $\operatorname{sgn}(d)$ ترمز لإشارة d. الفرض الإضافي على $\gamma_1,..,\gamma_r$ ضروري لضمان وجود التوقع. و في الحقيقة فإن الشرط مناسب عندما $d\neq 0$ فقط. و باستخدام العلاقة (4.31) يمكن بسهولة الحصول على العزوم للإحصاء المرتب المعمم الرائي المرافق على أساس دالة التوزيع من العائلة $\mathcal{H}=\{H_{c,d}(\cdot)=1-G_{c,d}(-\cdot):c>0,d\in R\}$ أي أنه إذا كانت دالة التوزيع هي:

$$H_{c,d}=\begin{cases}(1-cx)^{\frac{1}{d}}, & x\in(-\infty,0), \quad d<0\\ \exp(cx), & x\in(-\infty,0), \quad d=0\\ (1+cx)^{\frac{1}{d}}, & x\in(-\frac{1}{c},0), \quad d>0\end{cases}$$

العزوم للإحصاء المرتب المعمم المرافق تعطى على الصورة:

$$E\left(X_d(r,n,\tilde{m},k)\right)=-E\left(X(r,n,\tilde{m},k)\right)$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{\operatorname{sgn}(d)}{c}\left(1-\prod\limits_{j=1}^{r}\dfrac{\gamma_j}{\gamma_j+d}\right), & if\ d\neq 0,\gamma_j+d>0\\ & ,1\leq j\leq r\\ -\dfrac{1}{c}\sum\limits_{j=1}^{r}\dfrac{1}{\gamma_j}, & if\ \ d=0\end{cases}$$

ولمزيد من الأمثلة، يمكن الرجوع إلى **(Burkschat, Cramer and Kamps(2003))**.

المراجع
(References)

Ahsanullah, M. (2000). " Generalized order statistics from exponential distribution". Journal of Statistical Planning and Inference, Vol. 85, pp. 85-91.

Ahsanullah, M. (2004). " A Characterization of the uniform distribution by dual generalized order statistics". Communications in Statistics, Theory and Methods, Marcel Dekker, Vol. 33, No. 12, pp. 2921–2928.

Ahsanullah, M. (2005). On lower generalized order statistics and a characterization of the power function distribution. Statistical Methods, Vol. 7, No.1, pp. 16-28.

Al- Hussaini, E. K., Ahmad, A. A. and Al- Kashif, M. A. (2005). " Recurrence relations for moment and Conditional moment generating functions of generalized order statistics". Metria, Vol. 61, No.2, pp. 173-183.

Al- Matrafi, B. N. (2006). " Some results on the moments of generalized order statistics from linear exponential Distribution". Umm Al-Qura University Journal of Science-Medicine-Engineering, Vol. 18, No. 1, pp. 55-64.

Arnold, B.C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H.N. (1992). "A First Course In Order Statistics". Wiley, New York.

Arnold, B.C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H.N.(1998). "Records". Wiley, New York.

Athar, H., Anwar, Z. and Khan, R.U. (2008). "On recurrence relations for the expectations of function of lower generalized order statistics". Pakistan J. statist., Vol. 24, No.2, pp. 111

Athar, H. and Islam, H. M. (2004). " Recurrence relations for single and product moments of generalized order statistics from a general class of distribution". Metron, Vol. LXII, No. 3, pp. 327-337.

Athreya, Krishna B. and Lahiri, Soumendra N.(2006)." Measure Theory and Probability Theory".Springer Science+Business Media, LLC. New York.

Balakrishnan, N. and Cohen, A.C. (1991). "Order Statistics and Inference: Estimation Methods". Academic Press, Inc., San Diego.

Burkschat, M., Cramer, E. and Kamps,U.(2002). " Linear estimation of location and scale parameters based on generalized order statistics from extended generalized Pareto distributions". Submitted.

Burkschat, M., Cramer, E. and Kamps,U.(2003). " Dual generalized order statistics". Metron, Vol. LXI, No. 1, pp.13-26.

Chandler, K.N.(1952)."The Distribution and frequency of record values", Journal of Royal Statistical Society, Series B, Vol.14, pp.220-28.

Cohen, A.C. (1991). " Truncated and Censored Samples: Theory and Applications". Marcel Dekker, New York.

Cohen, A.C. and Whitten. B. (1988). "Parametric Estimation in Reliability and Life Span Models". Marcel Dekker, New York.

Cole, R. H. (1951). "Relations between moments of order statistics". The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 22, pp. 308-310.

Cramer, E. (2003). "Contributions to Generalized Order Statistics". Habililationsschrift, Reprint, University of Oldenburg.

Cramer, E. and Kamps, U. (2003). "Marginal distributions of sequential and generalized order statistics", Metrika, Vol. 58, pp. 293–310.

Cramer, E., Kamps, U. and Rychlik, T.(2002). "On the existence of moments of generalized order statistics". Statistics & Probability Letters, Vol. 59, pp. 397-404.

David, H.A. (1981)." Order Statistics",(2^{nd} ed). Wiley, New York.

David, H.A. and Nagaraja, H. N. (2003)." Order Statistics", (3^{rd} ed), Wiley, Canada.

Dziubdziela, W. and Kopociński, B. (1976)." Limiting properties of the k-th record values", Journal of Applied Mathematics, Vol.15, pp.187-190.

Grudzień, Z. and Szynal, D. (1983). "On the expected values of k[th] record values and associated characterizations of distributions. In: F. Konecny et al. (Eds), The Probability and Statistics Dec. Theory Vol. A, Reidel, Dordrecht, pp. 119-127.

Heffernan, J.E. and Tawn, J.A.(2003)." Extreme Value Theory", Lancaster University.

Johnson, N. L., Kotz, S. and Balakrishnan, N. (1994)." Continuous Univariate Distributions". (2[nd] ed),vol. 1(Wiley, New York).

Kamps,U.(1995a). "A Concept of Generalized Order Statistics". Teubner Stuttgart, Germany

Kamps,U.(1995b). "A Concept of generalized Oorder statistics". Journal of Statistical Planning and Inference, Vol.48, pp. 1-23.

Kamps, U. and Cramer, E. (2001). "On distribution of generalized order statistics". Statistics, Vol. 35, pp. 269

Kamps, U. and Gather, U. (1997). " Characteristic properties of generalized order statistics from exponential distributions". Applications Mathematicae , Vol. 24, No. 4, pp. 383-391.

Likeš, J. (1967). " Distributions of some Statistics in Samples from exponential and power function populations". Journal of the American Statistical Association, Vol.62, pp.259-271.

Lin, G.D. (1988). "Characterizations of Distributions Via Relationships Between Two Moments of Order Statistics". Journal of Statistical Planning and Inference, Vol. 19, pp. 73- 80.

Mahmoud, M. A. W. and Al-Nagar, H. SH. (2007). "On generalized order statistics from generalized power function distribution and its characterization". Journal of the Egyptian Mathematical Society, Vol.15, No. 1, pp. 129-138.

Mahmoud, M. A. W. and Al-Nagar, H. SH. (2009). "On generalized order statistics from linear exponential distribution and its characterization".statistical pepers, Spriner – Verlag, Vol. 50, pp.407-418.

Malik, H.J. (1967). "Exact moments of order statistics from a power-function distribution". Skand. Aktuarietidskrift, Vol.50, pp.64 -69.

Mathai, A. M. (1993). "A Handbook of Generalized Special Functions for Statistical and Physical Sciences". Clarendon Press, Oxford.

Mbah, Alfred and Ahsanullah, M. (2007). "Some characterizations of the power function distribution based on lower generalized order statistics". Pakistan J. Statist., Vol. 23, No. 2, pp. 139-146.

Nagaraja, H. N. (1978)." On the expected values of record values". Australian Journal of Statistics, Vol. 20, pp. 176–182.

Pawlas, P. and Szynal, D. (2001). "Recurrence relations for single and product moments of lower generalized order statistics from the inverse Weibull distributions". Demonstratio Mathematica, Vol. XXXIV, No. 2, pp. 353-358.

Pfeifer, D. (1979). "Record Values" in einem stochastischen Modell mit nicht-identischen Verteilungen. Dissertation, Aachen University of Technology.

Resnick, S.I. (1973). "Limit laws for record values". Stoch. Proe. Appl., Vol. I, pp. 67-82.

Rohatgi, V.K. and Saleh, A.K.MD.E. (1988). "A class of distributions connected to order statistics with nonintegral sample size". Communications in Statistics, Theory Methods, Vol. 17, pp. 2005-2012.

Saran, J. and Pandey, A. (2003). "Recurrence relations for marginal and Joint moments generating functions of generalized order statistics from power function distribution". Metron, Vol. LXI, No. 1, pp. 27-33.

ملحق الرسالة

الملحق
(Appendix)

A.1– الدالة المتصلة Continuous Function

(A.1.1) الدالة منتظمة الاتصال Uniformly Continuous Function

تعريف (A.1.1)

يقال أن $F:R \to R$ دالة منتظمة الاتصال على S، إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\delta > 0$، فإن $|F(x)-F(y)| < \varepsilon$، عندما $|x-y| < \delta$.

إذا كانت F متصلة على مجموعة مغلقة محدودة، فإنها تكون منتظمة الاتصال على S.

(A.1.2) الدالة مطلقة الاتصال Absolutely Continuous Function

تعريف (A.1.2)

يقال أن $F:R \to R$ دالة مطلقة الاتصال (a.c.)، إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\delta > 0$، بحيث إذا كانت $I_j = [a_j, b_j]$ ، $j = 1,2,...,k$ ، $k \in N$ فترات جزئية منفصلة (disjoint)، وكانت $\sum_{j=1}^{k} |b_j - a_j| < \delta$ ، فإن $\sum_{j=1}^{k} |F(b_j) - F(a_j)| < \varepsilon$

أي أنه إذا كانت F دالة قابلة للاشتقاق، وكانت $F'(.)$ محدودة (bounded)، فإن F دالة مطلقة الاتصال. و إذا كانت F دالة مطلقة الاتصال، فإن F دالة منتظمة الاتصال.**تعريف (A.1.3)**

بفرض أن $F:[a,b] \to R$ دالة مطلقة الاتصال و كانت $\widetilde{F}$ معرفة كالآتي:

$$\widetilde{F} = \begin{cases} F(x) & if \quad a \le x \le b \\ F(a) & if \quad x < a \\ F(b) & if \quad x > b \end{cases}$$

فإن $\widetilde{F}$ دالة مطلقة الاتصال.

لمزيد من المعلومات راجع Athreya and Lahiri (2006)

A.2 – دوال خاصة Special Functions

(A.2.1) دالة جاما Gamma Function

تعريف (A.2.1)

إذا كانت $a>0$ ، فإن دالة جاما تعرف كالآتي:

$$\Gamma(a)=\int_0^{\infty} t^{a-1}e^{-t}dt$$

وإذا كانت a عدد صحيح موجب، فإن $\Gamma(a+1)=a!$ ، و منها نجد أن $\Gamma(a+1)=a\Gamma(a)$.

و لأي $x>0$ ، فإن دالة جاما غير التامة (Incomplete Gamma Function) تعرف على الصورة:

$$\Gamma_x(a)=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^{x} t^{a-1}e^{-t}dt \ , \qquad a>0$$

نظرية مساعدة (A.2.2)

إذا كانت $\Gamma_x(a)$ هي دالة جاما غير التامة فإن:

$$\Gamma_x(a+1)=\Gamma_x(a)-\frac{e^{-x}x^a}{\Gamma_x(a+1)}$$

(A.2.2) دالة بيتا Beta Function

تعريف (A.2.3)

إذا كانت $a>0$ ، $b>0$ فإن دالة بيتا تعرف كالآتي:

$$B(a,b)=\int_0^{1} t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$$
$$=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

و لأي $x\in[0,1]$ ، فإن دالة بيتا غير التامة (Incomplete Beta Function) تعرف على الصورة:

$$I_x(a,b)=\frac{1}{B(a,b)}\int_0^{x} t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt, \quad a>0, b>0$$

نظرية مساعدة (A.2.4)

إذا كانت $I_x(a,b)$ هي دالة بيتا غير التامة فإن:

$$(i)\quad I_x(a-1,b+1)-I_x(a,b)=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b+1)}x^{a-1}(1-x)^b$$

$$(ii)\quad I_x(a,b)-I_x(a+1,b-1)=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+1)\Gamma(b)}x^{a}(1-x)^{b-1}$$

لمعرفة المزيد عن دالتي جاما و بيتا راجع ((Mathai(1993)) أو ملحق(Cramer(2003), A.2).

Meijer`s G-function (A.2.3)

في حالة الإحصاءات المرتبة المعممة يمكن تمثيل الدالة الخاصة Meijer`s G-function على الصورة:

$$G_{r,r}^{r,0}\left[z\left|\begin{matrix}\gamma_1,\ldots,\gamma_r\\ \gamma_1-1,\ldots,\gamma_r-1\end{matrix}\right.\right]=\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{z^t}{\prod\limits_{j=1}^{r}(\gamma_j-1-t)}dz,\quad |z|<1$$

و تعلب الدالة الخاصة Meijer`s G-function ، دوراً هاماً في العلاقات التكرارية بالنسبة للإحصاءات المرتبة المعممة.

تمهيدية (A.2.5)

بفرض أن $r\geq 2$ ، و $z\in[0,1)$ فإن:

$$(i)\quad G_{1,1}^{1,0}\left[z\left|\begin{matrix}\gamma_1,\ldots\gamma_r\\ \gamma_1-1,\ldots,\gamma_r-1\end{matrix}\right.\right]=z^{\gamma_1-1},$$

$$(ii)\quad (\gamma_r-\gamma_1)G_{r,r}^{r,0}\left[z\left|\begin{matrix}\gamma_1,\ldots,\gamma_r\\ \gamma_1-1,\ldots,\gamma_r-1\end{matrix}\right.\right]$$

$$=G_{r-1,r-1}^{r-1,0}\left[z\left|\begin{matrix}\gamma_1,\ldots,\gamma_{r-1}\\ \gamma_1-1,\ldots,\gamma_{r-1}-1\end{matrix}\right.\right]-G_{r-1,r-1}^{r-1,0}\left[z\left|\begin{matrix}\gamma_2,\ldots,\gamma_r\\ \gamma_2-1,\ldots,\gamma_r-1\end{matrix}\right.\right]$$

$$(iii)\ \frac{d}{dz}G_{r,r}^{r,0}\left[z\left|\begin{matrix}\gamma_1,...,\gamma_r\\ \gamma_1-1,...,\gamma_r-1\end{matrix}\right.\right]$$

$$=\frac{1}{z}\left((\gamma_r-1)G_{r,r}^{r,0}\left[z\left|\begin{matrix}\gamma_1,...,\gamma_r\\ \gamma_1-1,...,\gamma_r-1\end{matrix}\right.\right]-G_{r-1,r-1}^{r-1,0}\left[z\left|\begin{matrix}\gamma_2,...,\gamma_r\\ \gamma_2-1,...,\gamma_r-1\end{matrix}\right.\right]\right)$$

$$(iv)\ z^aG_{r,r}^{r,0}\left[z\left|\begin{matrix}\gamma_1,...,\gamma_r\\ \gamma_1-1,...,\gamma_r-1\end{matrix}\right.\right]=G_{r,r}^{r,0}\left[z\left|\begin{matrix}\gamma_1+a,...,\gamma_r+a\\ \gamma_1+a-1,...,\gamma_r+a-1\end{matrix}\right.\right],a\in R$$

لمعرفة المزيد من خصائص الدالة (Meijer`s G-function) راجع (Mathai(1993))

الفصل (2.3.4) أو ملحق (Cramer(2003), A.2).

A.3− صيغ تكاملية Integration Formulae

تمهيدية (A.3.1) ملحق ((Kamps (1995 a))

إذا كانت $\mu,\nu,m+1>0$ فإن

$$(i)\ \int_0^1 x^{\mu-1}\left(1-x^{m+1}\right)^{\nu-1}dx=\frac{1}{m+1}B\left(\frac{\mu}{m+1},\nu\right)$$

و إذا كانت $\mu,\nu>0$ فإن

$$(ii)\ \int_0^1 x^{\mu-1}\left(-\log x\right)^{\nu-1}dx=\mu^{-\nu}\Gamma(\nu)$$

نظرية مساعدة (A.3.2) ملحق ((Kamps (1995 a))

بفرض أن g_m معرفة كما في الباب الثاني ملاحظة (2.2)، و $\mu,\nu>0$ ، بحيث

$\mu+(\nu-1)(m+1)>0$ ، فإن:

$$\int_0^1(1-t)^{\mu-1}g_m^{\nu-1}(t)dt=\begin{cases}(m+1)^{-\nu}B\left(\frac{\mu}{m+1},\nu\right), & m>-1\\ \mu^{-\nu}\Gamma(\nu), & m=-1\\ (-m-1)^{-\nu}B\left(-\frac{\mu}{m+1}-\nu+1,\nu\right), & m>-1\end{cases}$$

$$=\Gamma(\nu)\left(\prod_{i=o}^{\nu-1}\left(\mu+i(m+1)\right)\right)^{-1}$$

4− متباينة Hölder

نظرية (A.4.1)

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\right| \le \left\{\int_a^b f(x)\right\}^{1/p} \left\{\int_a^b g(x)\right\}^{1/q}$$

حيث أن $p>1$ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$ و $f(x)\in L^p, g(x)\in L^q$

وتتحقق المساواة إذا وإذا فقط كان المقدار $|f(x)|^p \big/ |g(x)|^q$ ثابتاً دائماً.

ونلاحظ أنه عندما $p=2, q=2$ فإن هذه المتباينة تؤول لمتباينة Schwarz.

راجع Kamps (1995a)

الملخص

باللغة الإنجليزية

ABSTRACT

On Some Properties of Generalized Order Statistics

The main purpose of this research is *to give a comprehensive survey of the principal results of generalized order statistics.* In particular, the distribution theory for *generalized order statistics*, representations for one, two and higher dimensional marginal densities and a form of one dimensional marginal distribution functions are given. The single and product moments of generalized order statistics and recurrence relations of single moments are presented. These relations are then used to give the moments of some continuous probability distributions (such as the power function, Weibull, Pareto and generalized extreme value distributions) in the case of ordinary order statistics as well as the case of record values. These distributions have a great importance in many application fields such as statistical inference, reliability theory and lifetime tests. Besides the research introduces the dual generalized order statistics as unified distribution theoretical set-up which contains a variety of descendingly ordered random variables. Also, the relations between generalized order statistics and their duals are established.
This dissertation consists of four chapters and a list of references.

Chapter One:

This chapter comprises the basic concepts related to the research topic. It also presents a literature review of the previous researches related to the topic and defines the problem to be studied.

Chapter Tow:

In this chapter, the distribution theory for one, two and higher dimensional marginal densities and a form of one dimensional marginal distribution functions are given, the single moments, the difference of moments and recurrence relations of m- generalized order statistics are presented. These relations are then applied on some of the aforementioned continuous probability distributions. The particular cases, the ordinary order statistics and record values are derived.

Chapter Three:

In this chapter, a very important results are presented. We study a more general distribution theory for GOS in the general.

Chapter Four:

In this chapter, we study the distributional theory of dual generalized order statistics. The single moments, the difference of moments and recurrence relations of dual generalized order statistics are presented. Connections between both models are studied. Several examples illustrate that these relations can be effectively utilized to transfer results, already known in the case of generalized order statistics to the dual model.

Dr. Magdy E. El-Adll Rania Mustafa Mohammad Ali Hariri

Kingdom of Saudi Arabia
Ministry of Higher Education
Umm Al-Qura University
Faculty of Applied Science for Girls
Deanship of Higher Studies
Department of Mathematics

On Some Properties of Generalized Order Statistics

Thesis Submitted to Mathematics Department
in Partial Fulfillment of Requirements for
the Degree of Master of Science in Mathematics
(Mathematical Statistics)

By
Rania Mustafa Mohammad Ali Hariri
B.Sc. in Mathematics
Girls Education College, Makkah, Saudi Arabia (2002)

Supervised
By
Dr. Magdy E. El-Adll
Assoc. Prof. of Mathematical Statistic
Faculty of Science – Taif University

1430 A.H – 2009 A.D